Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 14. Dezember, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 Prädikatenlogik mit Gleichheit

Wir betrachten nun eine Erweiterung der Prädikatenlogik: Sind t_1 und t_2 Terme, so sei $t_1 = t_2$ eine zulässige Formel. Für eine Struktur $\mathcal{A}$ sei der Wahrheitswert $\mathcal{A}(t_1 = t_2) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{A}(t_1) = \mathcal{A}(t_2)$, also die Auswertung von t_1 und t_2 unter $\mathcal{A}$ dasselbe Element des Universums ergibt. Prädikatenlogik mit Gleichheit ist ausdrucksmächtiger als normale Prädikatenlogik.

(a) Finden Sie eine Formel der *Prädikatenlogik mit Gleichheit*, so dass die Grundmenge jeder Struktur, die Modell von F ist, ...

  (i) ... *genau* zwei Elemente hat.

  (ii) ... eine gerade endliche Anzahl von Elementen hat oder unendlich ist.

  Hinweis: Für (ii) muss man ausdrücken, dass jeweils zwei Elemente ein "Paar" bilden, d.h. in einer binären Relation enthalten sind.

(b) In der Mathematik wird die Summe mit Hilfe folgender zwei Gleichungen charakterisiert:

$$x + 0 = x \qquad \text{und} \qquad x + s(y) = s(x + y)$$

Dabei ist $s(x)$ der "Nachfolger" von x, d.h. $x + 1$. In der Prädikatenlogik mit Gleichheit können wir diese zwei Gleichungen so übersetzen, dass wir eine Formel erhalten, die die Summe eindeutig in Form eines *Prädikats* charakterisiert, z.B. so:

$$\begin{aligned} F \;=\; & \forall x\, Sum(x,0,x) \quad \wedge \quad \forall x \forall y \forall z \big(Sum(x,y,z) \to Sum(x,s(y),s(z))\big) \\ & \wedge \quad \forall x \forall y \forall z \forall w \big((Sum(x,y,z) \wedge Sum(x,y,w)) \to z = w\big) \end{aligned}$$

F charakterisiert die Summe in folgendem Sinne: Unter der Annahme, dass das Universum die natürlichen Zahlen sind, die Konstante 0 als die Zahl 0 interpretiert wird und s die Nachfolgerfunktion ist, ist eine Struktur $\mathcal{A}$ genau dann Modell von F, wenn $Sum^{\mathcal{A}}(x,y,z)$ genau die Tripel (x,y,z) enthält, so dass $x + y = z$ gilt.

(i) Das Produkt wird durch die Gleichungen

$$x \cdot 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$

definiert. Stellen Sie eine Formel auf, die (analog zu F) das Produkt eindeutig charakterisiert. (Dazu benötigen Sie die Charakterisierung der Summe, d.h. Sie können F wiederverwenden.)

(ii) Stellen Sie Formeln auf, mit denen (unter Verwendung von Produkt und Summe) die folgenden Prädikate charakterisiert werden:

- die Teilereigenschaft, d.h. $\mathit{Teiler}(x, y)$ soll genau dann gelten, wenn y die Zahl x teilt;
- die Primzahleigenschaft, d.h. $\mathit{Prim}(x)$ soll genau dann gelten, wenn x eine Primzahl ist;
- eine Vergleichsrelation, d.h. $\mathit{Kleiner}(x, y)$ soll genau dann gelten, wenn $x < y$ ist.

(iii) Stellen Sie eine Formel auf, die ausdrückt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Verwenden Sie dazu die in (b) benutzten Prädikate.

Aufgabe 2 Äquivalenzgesetze

Beweisen Sie durch Äquivalenzumformungen, dass die folgenden prädikatenlogischen Formeln F und G äquivalent sind. Geben Sie die von Ihnen verwendeten Gesetze an.

$$\begin{array}{rcl} F & = & \forall x \exists y \big((P(x, f(z)) \land Q(y)) \lor (P(x, f(z)) \land \neg \forall y R(y)) \big) \\ G & = & \forall x \exists u \exists y \big((\neg R(u) \lor Q(y)) \land P(x, f(z)) \big) \end{array}$$

Aufgabe 3 Normalformen

Sei $F = \forall y \neg ((P(b, g(x)) \lor \forall x Q(f(x))) \land R(y))$. Formen Sie F in eine zu F erfüllbarkeitsäquivalente Aussage G in Skolemform um, indem Sie die Schritte ausführen, die in den Vorlesungsfolien *Normalformen* (Seiten 7 und 8) angegeben sind. Geben Sie in jedem Umformungsschritt an, ob die beiden Formeln äquivalent oder nur erfüllbarkeitsäquivalent sind. Geben Sie am Schluss die Matrix von G in Klauselform an.

Aufgabe 4 Normalformen II

Sei F eine Formel der Prädikatenlogik. Geben Sie ein Verfahren an, das aus F eine Formel G konstruiert mit folgenden Eigenschaften:

(i) G ist in Pränexform, und alle Quantoren in G sind existenziell.

(ii) G ist gültig genau dann, wenn F gültig ist.

Beweisen Sie, dass Ihr Verfahren die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt.