Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 14. Dezember, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 Prädikatenlogik mit Gleichheit

Wir betrachten nun eine Erweiterung der Prädikatenlogik: Sind t_1 und t_2 Terme, so sei $t_1 = t_2$ eine zulässige Formel. Für eine Struktur $\mathcal{A}$ sei der Wahrheitswert $\mathcal{A}(t_1 = t_2) = 1$ genau dann, wenn $\mathcal{A}(t_1) = \mathcal{A}(t_2)$, also die Auswertung von t_1 und t_2 unter $\mathcal{A}$ dasselbe Element des Universums ergibt. Prädikatenlogik mit Gleichheit ist ausdrucksmächtiger als normale Prädikatenlogik.

(a) Finden Sie eine Formel der *Prädikatenlogik mit Gleichheit*, so dass die Grundmenge jeder Struktur, die Modell von F ist, ...

  (i) ... *genau* zwei Elemente hat.

  (ii) ... eine gerade endliche Anzahl von Elementen hat oder unendlich ist.

  Hinweis: Für (ii) muss man ausdrücken, dass jeweils zwei Elemente ein "Paar" bilden, d.h. in einer binären Relation enthalten sind.

(b) In der Mathematik wird die Summe mit Hilfe folgender zwei Gleichungen charakterisiert:

$$x + 0 = x \qquad \text{und} \qquad x + s(y) = s(x + y)$$

Dabei ist $s(x)$ der "Nachfolger" von x, d.h. $x + 1$. In der Prädikatenlogik mit Gleichheit können wir diese zwei Gleichungen so übersetzen, dass wir eine Formel erhalten, die die Summe eindeutig in Form eines *Prädikats* charakterisiert, z.B. so:

$$\begin{aligned} F \;=\; & \forall x\, Sum(x,0,x) \quad\wedge\quad \forall x \forall y \forall z \big(Sum(x,y,z) \to Sum(x,s(y),s(z))\big) \\ & \wedge \quad \forall x \forall y \forall z \forall w \big((Sum(x,y,z) \wedge Sum(x,y,w)) \to z = w\big) \end{aligned}$$

F charakterisiert die Summe in folgendem Sinne: Unter der Annahme, dass das Universum die natürlichen Zahlen sind, die Konstante 0 als die Zahl 0 interpretiert wird und s die Nachfolgerfunktion ist, ist eine Struktur $\mathcal{A}$ genau dann Modell von F, wenn $Sum^{\mathcal{A}}(x,y,z)$ genau die Tripel (x,y,z) enthält, so dass $x + y = z$ gilt.

(i) Das Produkt wird durch die Gleichungen

$$x \cdot 0 = 0 \qquad \text{und} \qquad x \cdot s(y) = x \cdot y + x$$

definiert. Stellen Sie eine Formel auf, die (analog zu F) das Produkt eindeutig charakterisiert. (Dazu benötigen Sie die Charakterisierung der Summe, d.h. Sie können F wiederverwenden.)

(ii) Stellen Sie Formeln auf, mit denen (unter Verwendung von Produkt und Summe) die folgenden Prädikate charakterisiert werden:

- die Teilereigenschaft, d.h. $\mathit{Teiler}(x, y)$ soll genau dann gelten, wenn y die Zahl x teilt;
- die Primzahleigenschaft, d.h. $\mathit{Prim}(x)$ soll genau dann gelten, wenn x eine Primzahl ist;
- eine Vergleichsrelation, d.h. $\mathit{Kleiner}(x, y)$ soll genau dann gelten, wenn $x < y$ ist.

(iii) Stellen Sie eine Formel auf, die ausdrückt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Verwenden Sie dazu die in (b) benutzten Prädikate.

Aufgabe 1 **(Lösungsvorschlag)** *Prädikatenlogik mit Gleichheit*

(a) (i) Wir ergänzen die Formel für "mindestens zwei Elemente" aus dem vorigen Übungsblatt um eine Klausel, die höchstens zwei Elemente zulässt:

$$F = P(a) \land \neg P(b) \land \forall x((x = a) \lor (x = b))$$

(ii) Wir charakterisieren P als Relation, in der jedes Element einen Nachfolger hat, und die nur aus Kreisen der Länge höchstens zwei besteht. Da P außerdem irreflexiv ist, besteht P aus lauter Paaren x, y, so dass $P(x, y)$ und $P(y, x)$ gilt und x, y sonst mit keinem anderen Element in Verbindung stehen.

$$\forall x \neg P(x, x) \land \forall x \exists y P(x, y) \land \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \land P(y, z) \to (x = z))$$

Alternative Lösung: Wir führen ein zweites Prädikat Q ein, so dass von jedem Q-Element genau eine Kante zu einem Nicht-Q-Element geht. Außerdem fordern wir, dass jedes Nicht-Q-Element genau eine eingehende Kante von einem Q-Element besitzt. Auch dadurch ist die paarweise Gruppierung garantiert.

$$\begin{gathered}\forall x \exists y \big(Q(x) \to \big(P(x, y) \land \neg Q(y) \land \forall z (P(x, z) \to z = y)\big)\big) \\ \land\ \forall x \exists y \big(\neg Q(x) \to \big(P(y, x) \land Q(y) \land \forall z (P(z, x) \to z = y)\big)\big)\end{gathered}$$

(b) Die folgenden Formeln bauen aufeinander auf. Sei also F die Formel, die die Summe charakterisiert.

(i) Das Produkt kennzeichnen wir analog zur Summe wie folgt:

$$\begin{aligned} F' \;=\; & \forall x\; Prod(x,0,0) \;\wedge\; \forall x \forall y \forall z \forall w \big((Prod(x,y,z) \wedge Prod(x,y,w)) \rightarrow z = w\big) \\ & \wedge\; \forall x \forall y \forall z \big(Prod(x,y,z) \rightarrow \exists w (Prod(x,s(y),w) \wedge Sum(z,x,w))\big) \end{aligned}$$

Die Lösung ergibt sich dann als $F \wedge F'$.

(ii)
- Teiler: $T = F \wedge F' \wedge \forall x \forall y \big(Teiler(x,y) \leftrightarrow \exists z\; Prod(y,z,x)\big)$
- Primzahl: $P = T \wedge \forall x \big(Prim(x) \leftrightarrow \forall z (Teiler(x,z) \rightarrow (z = 1 \vee z = x))\big)$
- Kleiner: $K = F \wedge \big(Kleiner(x,y) \leftrightarrow \exists z\; Sum(x,s(z),y)\big)$

(iii) $P \wedge K \wedge \forall x \big(Prim(x) \rightarrow \exists y (Prim(y) \wedge Kleiner(x,y)\big)$

Aufgabe 2 Äquivalenzgesetze

Beweisen Sie durch Äquivalenzumformungen, dass die folgenden prädikatenlogischen Formeln F und G äquivalent sind. Geben Sie die von Ihnen verwendeten Gesetze an.

$$\begin{aligned} F &= \forall x \exists y \big((P(x,f(z)) \wedge Q(y)) \vee (P(x,f(z)) \wedge \neg \forall y R(y))\big) \\ G &= \forall x \exists u \exists y \big((\neg R(u) \vee Q(y)) \wedge P(x,f(z))\big) \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Lösungsvorschlag) *Äquivalenzgesetze*

$$\begin{aligned} F &= \forall x \exists y \big((P(x,f(z)) \wedge Q(y)) \vee (P(x,f(z)) \wedge \neg \forall y R(y))\big) & \\ &\equiv \forall x \exists y \big((\neg \forall y R(y) \vee Q(y)) \wedge P(x,f(z))\big) & \text{(Distributivität, Kommutativität)} \\ &\equiv \forall x \exists y \big((\neg \forall u R(u) \vee Q(y)) \wedge P(x,f(z))\big) & \text{(gebundene Umbenennung)} \\ &\equiv \forall x \exists y \big((\exists u \neg R(u) \vee Q(y)) \wedge P(x,f(z))\big) & \text{(Negation vor Quantor)} \\ &\equiv \forall x \exists y \exists u \big((\neg R(u) \vee Q(y)) \wedge P(x,f(z))\big) & \text{(Quantor vorziehen)} \\ &\equiv \forall x \exists u \exists y \big((\neg R(u) \vee Q(y)) \wedge P(x,f(z))\big) & \text{(Tausch gleicher Quantoren)} \\ &= G & \end{aligned}$$

Aufgabe 3 Normalformen

Sei $F = \forall y \neg((P(b,g(x)) \vee \forall x Q(f(x))) \wedge R(y))$. Formen Sie F in eine zu F erfüllbarkeitsäquivalente Aussage G in Skolemform um, indem Sie die Schritte ausführen, die in den Vorlesungsfolien *Normalformen* (Seiten 7 und 8) angegeben sind. Geben Sie in jedem Umformungsschritt an, ob die beiden Formeln äquivalent oder nur erfüllbarkeitsäquivalent sind. Geben Sie am Schluss die Matrix von G in Klauselform an.

Aufgabe 3 **(Lösungsvorschlag)** *Normalformen*

$$
\begin{aligned}
F \;&= \forall y \neg((P(b,g(x)) \vee \forall x Q(f(x))) \wedge R(y)) && \\
&\equiv \forall y \neg((P(b,g(x)) \vee \forall z Q(f(z))) \wedge R(y)) && \text{(gebundene Var. umbenennen)}\\
&\equiv_e \exists x \forall y \neg((P(b,g(x)) \vee \forall z Q(f(z))) \wedge R(y)) && \text{(Binden freier Variablen)}\\
&\equiv \exists x \forall y((\neg P(b,g(x)) \wedge \neg \forall z Q(f(z))) \vee \neg R(y)) && \text{(DeMorgan)}\\
&\equiv \exists x \forall y((\neg P(b,g(x)) \wedge \exists z \neg Q(f(z))) \vee \neg R(y)) && \text{(Negation vor Quantor)}\\
&\equiv \exists x \forall y \exists z((\neg P(b,g(x)) \wedge \neg Q(f(z))) \vee \neg R(y)) && \text{(Quantoren vorziehen)}\\
&\equiv_e \forall y((\neg P(b,g(a)) \wedge \neg Q(f(h(y)))) \vee \neg R(y)) && \text{(Skolemisierung)}\\
&\equiv \forall y((\neg P(b,g(a)) \vee \neg R(y)) \wedge (\neg Q(f(h(y))) \vee \neg R(y))) && \text{(Distributivgesetz)}\\
&= G
\end{aligned}
$$

Das Symbol $\equiv_e$ steht für eine erfüllbarkeitsäquivalente Umformung.
Matrix in Klauselform: $\{\{\neg P(b,g(a)), \neg R(y)\}, \{\neg Q(f(h(y))), \neg R(y)\}\}$.

Aufgabe 4 Normalformen II

Sei F eine Formel der Prädikatenlogik. Geben Sie ein Verfahren an, das aus F eine Formel G konstruiert mit folgenden Eigenschaften:

(i) G ist in Pränexform, und alle Quantoren in G sind existenziell.

(ii) G ist gültig genau dann, wenn F gültig ist.

Beweisen Sie, dass Ihr Verfahren die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt.

Aufgabe 4 **(Lösungsvorschlag)** *Normalformen II*

Wir präsentieren zwei Lösungen. Die eine nimmt den Umweg über Skolemisierung, ist aber einfach zu beweisen, die andere stellt eine direkte Umformung dar, ist aber schwieriger zu beweisen.

Die erste Lösung geht wie folgt: F ist gültig genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar ist. Wir erzeugen dann mithilfe des Skolemisierungsverfahrens eine zu $\neg F$ erfüllbarkeitsäquivalente Formel G, die in Pränexform ist und nur Allquantoren enthält. G ist also unerfüllbar (und damit $\neg G$ gültig) genau dann, wenn $\neg F$ unerfüllbar bzw. F gültig ist. $\neg G$ ist äquivalent zu einer Formel, die in Pränexform ist und nur Existenzquantoren enthält.

In der zweiten Lösung bringen wir F erst einmal in (bereinigte) Pränexform. Anschließend führen wir eine Ersetzung wie bei der Skolemisierung durch, wir vertauschen lediglich die Rolle der Existenz- und der Allquantoren. (Beispiel: Aus einer Formel $F' = \exists x \forall y\ G$ wird $F'' = \exists x\ G[y/f(x)]$.) Die so entstandene Formel ist in Pränexform und hat nur noch Existenzquantoren. Es bleibt zu zeigen, dass die Ersetzung die Gültigkeitsäquivalenz erhält; wir zeigen dies am Beispiel der Formeln F' und F''. (Ein allgemeiner Beweis müsste berücksichtigen, dass F' mit mehreren Existenzquantoren beginnen könnte, das wäre aber lediglich mit mehr Schreibarbeit verbunden.) Zu zeigen ist also: F' ist gültig genau dann, wenn F'' gültig ist.

Sei also F' gültig. Sei ferner $\mathcal{A}$ eine passende Struktur für F'', so ist $\mathcal{A}$ ebenso eine passende Struktur (und daher ein Modell) für F'. Dann gibt es ein Element a aus der Grundmenge von $\mathcal{A}$, so dass $\mathcal{A}_{[x/a]}(\forall y\ G) = 1$ ist. Egal, welchen Wert $f^{\mathcal{A}}(a)$ hat, wird demzufolge $\mathcal{A}_{[x/a]}(G[y/f(x)]) = 1$ sein und demzufolge auch $\mathcal{A}(\exists x\ G[y/f(x)]) = \mathcal{A}(F'') = 1$. Demzufolge ist $\mathcal{A}$ Modell von F'', und F'' ist gültig.

Für die Rückrichtung nehmen wir an, F' sei nicht gültig, und $\mathcal{A}$ sei ein Modell von $\neg F' \equiv \forall x \exists y \neg G$. Wir erweitern $\mathcal{A}$ zu einer Struktur $\mathcal{A}'$, indem wir eine Funktion $f^{\mathcal{A}'}$ hinzufügen. Für jedes Element a sei $f^{\mathcal{A}'}(a) = b$, wobei b irgendein Element ist, so dass $\mathcal{A}_{[x/a][y/b]}(G) = 0$ gilt (b existiert für jedes a wegen obiger Annahme). Offensichtlich ist $\mathcal{A}'(F'') = \mathcal{A}'(\exists x\ G[y/f(x)]) = 0$, da für jedes Element a gilt, dass $\mathcal{A}'_{[x/a]}(G[y/f(x)]) = 0$ ist. Also ist F'' nicht gültig.