# Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 7. Dezember, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

**Aufgabe 1** Formeln und Strukturen

(a) In der Mathematik und Informatik ist es oft üblich, Sätze der folgenden Art zu formulieren

“Es gibt ein $x \in M$, so dass $P(x)$ gilt.” bzw. “$\exists x \in M \colon P(x)$.”

Hierbei ist $P(x)$ irgendeine Aussage bzw. ein Prädikat über $x$. Nun ist die Schreibweise $\exists x \in M$ in der Syntax der Prädikatenlogik nicht zugelassen. Finden Sie einen Weg, obige Aussage gleichwertig in Prädikatenlogik auszudrücken.

Tun Sie dasselbe für allquantifizierte Aussagen der Art “$\forall x \in M \colon P(x)$”. Überlegen Sie sich, ob Ihre Übersetzungen der Aussagen $\neg\exists x \in M \colon P(x)$ und $\forall x \in M \colon \neg P(x)$ äquivalent sind.

(b) Übersetzen Sie folgende Syllogismen in Prädikatenlogik:

(i) Einige $M$ sind nicht $P$, alle $M$ sind $S$, dann gilt: einige $S$ sind nicht $P$.

(ii) Kein $P$ ist $M$, kein $M$ ist $S$, dann gilt: einige $S$ sind nicht $P$.

(iii) Kein $M$ ist $P$, alle $S$ sind $M$, dann gilt: einige $S$ sind $M$.

Verwenden Sie Prädikate $M, P, S$, so dass z.B. $M(x)$ ausdrückt, dass $x \in M$ ist.

Welche der Formeln sind gültig? Geben Sie für jede Formel eine Struktur an, die Modell der Formel ist, und (falls möglich) eine, die *nicht* Modell der Formel ist.

(c) Geben Sie Modelle für folgende Formeln an.

(i) $\neg\exists x \forall y P(x, y)$

(ii) $\exists x(Q(x, c) \wedge \neg\forall y Q(x, y))$

(iii) $\forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow P(x, f(y))) \wedge \forall x \exists y P(x, y)$

(d) Finden Sie eine prädikatenlogische Formel $F$, so dass die Grundmenge jeder Struktur, die Modell von $F$ ist, ...

(i) ... *mindestens* zwei Elemente hat.

(ii) … *mindestens* drei Elemente hat.

(iii) … unendlich viele Elemente hat.

Hinweise: (i) und (ii) kann man mit einstelligen Prädikaten bewerkstelligen. Für (iii) benötigt man ein zweistelliges Prädikat.

## Aufgabe 2 Tarski's World

Unter `http://www.cs.plattsburgh.edu/~salvador/Tarski/index.html` finden Sie ein Java-Applet für "Tarski's World", das Sie zum Lösen dieser Aufgabe mitverwenden können.

(a) Geben Sie eine Tarski-Welt an, die ein Modell für alle folgenden prädikatenlogischen Ausdrücke ist:

$$\forall x \exists y \neg \mathit{SameSize}(x,y) \tag{1}$$
$$\forall x \forall y (\mathit{Triangle}(x) \wedge \mathit{Triangle}(y) \wedge \mathit{SameCol}(x,y) \rightarrow (x = y)) \tag{2}$$
$$\forall x \forall y (\mathit{Smaller}(x,y) \wedge \mathit{SameRow}(x,y) \rightarrow \mathit{LeftOf}(x,y)) \tag{3}$$
$$\mathit{Pentagon}(b) \wedge \mathit{Medium}(b) \tag{4}$$
$$\forall x (\mathit{Square}(x) \leftrightarrow \mathit{SameSize}(x,c)) \tag{5}$$
$$\exists x \exists y (\mathit{Triangle}(x) \wedge \mathit{Square}(y) \wedge \mathit{Between}(x,a,y)) \tag{6}$$
$$\exists x \exists y (\mathit{Triangle}(x) \wedge \mathit{Square}(y) \wedge \mathit{SameCol}(x,y)) \tag{7}$$
$$\mathit{Between}(b,a,c) \tag{8}$$
$$\forall x (\mathit{Pentagon}(x) \rightarrow \exists y (\mathit{Pentagon}(y) \wedge \neg (x = y) \wedge \mathit{SameCol}(x,y))) \tag{9}$$
$$\forall x (\mathit{Square}(x) \wedge \mathit{Small}(x) \rightarrow (x = a)) \tag{10}$$

Zeichnen Sie eine solche Welt oder drucken Sie eine aus. Für die Semantik der Prädikate ist das o.g. Applet maßgeblich.

(b) Übersetzen Sie folgende Aussagen in prädikatenlogische Aussagen in "Tarski's World". Verwenden Sie weder Konstanten noch freie Variablen.

(i) Kein Quadrat ist zwischen irgendwelchen Objekten.

(ii) Je weiter links ein Objekt ist, desto größer ist es.

(iii) Nichts ist zwischen zwei Quadraten.

(iv) Ein Quadrat, das rechts von einem Dreieck steht, ist groß.