

## Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 7. Dezember, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

### Aufgabe 1 Formeln und Strukturen

- (a) In der Mathematik und Informatik ist es oft üblich, Sätze der folgenden Art zu formulieren

“Es gibt ein  $x \in M$ , so dass  $P(x)$  gilt.” bzw. “ $\exists x \in M: P(x)$ .”

Hierbei ist  $P(x)$  irgendeine Aussage bzw. ein Prädikat über  $x$ . Nun ist die Schreibweise  $\exists x \in M$  in der Syntax der Prädikatenlogik nicht zugelassen. Finden Sie einen Weg, obige Aussage gleichwertig in Prädikatenlogik auszudrücken.

Tun Sie dasselbe für allquantifizierte Aussagen der Art “ $\forall x \in M: P(x)$ ”. Überlegen Sie sich, ob Ihre Übersetzungen der Aussagen  $\neg \exists x \in M: P(x)$  und  $\forall x \in M: \neg P(x)$  äquivalent sind.

- (b) Übersetzen Sie folgende Syllogismen in Prädikatenlogik:

- (i) Einige  $M$  sind nicht  $P$ , alle  $M$  sind  $S$ , dann gilt: einige  $S$  sind nicht  $P$ .
- (ii) Kein  $P$  ist  $M$ , kein  $M$  ist  $S$ , dann gilt: einige  $S$  sind nicht  $P$ .
- (iii) Kein  $M$  ist  $P$ , alle  $S$  sind  $M$ , dann gilt: einige  $S$  sind  $M$ .

Verwenden Sie Prädikate  $M, P, S$ , so dass z.B.  $M(x)$  ausdrückt, dass  $x \in M$  ist.

Welche der Formeln sind gültig? Geben Sie für jede Formel eine Struktur an, die Modell der Formel ist, und (falls möglich) eine, die *nicht* Modell der Formel ist.

- (c) Geben Sie Modelle für folgende Formeln an.

- (i)  $\neg \exists x \forall y P(x, y)$
- (ii)  $\exists x (Q(x, c) \wedge \neg \forall y Q(x, y))$
- (iii)  $\forall x \forall y (P(x, y) \rightarrow P(x, f(y))) \wedge \forall x \exists y P(x, y)$

- (d) Finden Sie eine prädikatenlogische Formel  $F$ , so dass die Grundmenge jeder Struktur, die Modell von  $F$  ist, ...

- (i) ... *mindestens* zwei Elemente hat.

(ii) ... *mindestens* drei Elemente hat.

(iii) ... unendlich viele Elemente hat.

Hinweise: (i) und (ii) kann man mit einstelligem Prädikaten bewerkstelligen. Für (iii) benötigt man ein zweistelliges Prädikat.

### Aufgabe 1 (Lösungsvorschlag) *Formeln und Strukturen*

- (a) Einstellige Prädikate sind gleichbedeutend mit Mengen: Jedes Element des Universums ist entweder in der Menge enthalten (erfüllt das Prädikat) oder nicht. Die Aussage  $x \in M$  lässt sich also in der Prädikatenlogik als  $M(x)$  darstellen.

$\exists x \in M: P(x)$  bedeutet:  $\exists x(M(x) \wedge P(x))$

$\forall x \in M: P(x)$  bedeutet:  $\forall x(M(x) \rightarrow P(x))$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\neg \exists x \in M: P(x) &\equiv \neg \exists x(M(x) \wedge P(x)) \\ &\equiv \forall x \neg(M(x) \wedge P(x)) \\ &\equiv \forall x(\neg M(x) \vee \neg P(x)) \\ &\equiv \forall x(M(x) \rightarrow \neg P(x)) \equiv \forall x \in M: \neg P(x)\end{aligned}$$

Mit der o.g. Interpretation lässt es sich also rechtfertigen, die Negationsgesetze der Prädikatenlogik auch auf mengen-quantifizierte Aussagen anzuwenden.

Umgangssprachlich sind Quantifizierungen über leere Mengen oft umstritten. Soll man z.B. die Aussage "Alle siebenbeinigen Katzen sind grau" als wahr oder falsch werten? Übersetzt man diese Aussage in Prädikatenlogik, so erhält man eine eindeutige Antwort: Wenn  $S$  die Menge der siebenbeinigen Katzen ist (vermutlich die leere Menge) und  $G$  die Menge der grauen Katzen, so entspricht obige Aussage  $\forall x \in S: x \in G$  bzw.  $\forall x(S(x) \rightarrow G(x))$ . Da  $S(x)$  für alle  $x$  falsch ist, ist diese Aussage wahr. Die Aussage "Es gibt eine siebenbeinige Katze, die grau ist" würde analog als falsch gewertet.

Unabhängig von  $P$  interpretiert man also die Aussage  $\exists x \in M: P(x)$  als falsch, die Aussage  $\forall x \in M: P(x)$  als wahr, wenn  $M$  die leere Menge ist.

- (b) Interpretiert man Mengen als einstellige Prädikate, so kann man Aussagen von Mengen in prädikatenlogische Aussagen umwandeln:

- "alle  $A$  sind  $B$ ":  $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$
- "kein  $A$  ist  $B$ ":  $\forall x(A(x) \rightarrow \neg B(x))$
- "einige  $A$  sind  $B$ ":  $\exists x(A(x) \wedge B(x))$
- "einige  $A$  sind nicht  $B$ ":  $\exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$

Demzufolge sind die Syllogismen wie folgt zu übersetzen:

$$(i) \left( \exists x(M(x) \wedge \neg P(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow S(x)) \right) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$$

$$(ii) \left( \forall x(P(x) \rightarrow \neg M(x)) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow \neg S(x)) \right) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$$

$$(iii) \left( \forall x(M(x) \rightarrow \neg P(x)) \wedge \forall x(S(x) \rightarrow M(x)) \right) \rightarrow \exists x(S(x) \wedge M(x))$$

Gültig ist Aussage (i), wie schon auf dem ersten Übungsblatt bewiesen wurde, die anderen sind erfüllbar, aber nicht gültig. Merke: In (iii) impliziert die linke Seite die *Negation* der rechten Seite, dennoch ist die Aussage erfüllbar, da wir ja die linke Seite “falsch machen” können.

Ein Beispiel für eine Struktur, die alle drei Aussagen erfüllt (trivialerweise, da sie die linken Seiten nicht erfüllt), ist  $\mathcal{A}$  mit  $U_{\mathcal{A}} = \{1\}$  und  $M^{\mathcal{A}} = P^{\mathcal{A}} = S^{\mathcal{A}} = \{1\}$ .

Eine Struktur, die Aussagen (ii) und (iii) nicht erfüllt, ist  $\mathcal{A}$  mit  $U_{\mathcal{A}} = \{1\}$  und  $M^{\mathcal{A}} = P^{\mathcal{A}} = S^{\mathcal{A}} = \emptyset$ .

(c) Sehr einfache Modelle sind jeweils  $\mathcal{A}$  mit

$$(i) U_{\mathcal{A}} = \{1\}, P^{\mathcal{A}} = \emptyset;$$

$$(ii) U_{\mathcal{A}} = \{1, 2\}, Q^{\mathcal{A}} = \{(1, 1)\}, c^{\mathcal{A}} = \{1\};$$

$$(iii) U_{\mathcal{A}} = \{1\}, P^{\mathcal{A}} = \{(1, 1)\}, f^{\mathcal{A}} = \text{id}_{U_{\mathcal{A}}}$$

(d) (i) und (ii) lassen sich durch die Einführung von Konstanten lösen, denen unterschiedliche Eigenschaften zugewiesen werden. Für (iii) beschreiben wir eine irreflexive, transitive Relation.

$$(i) P(a) \wedge \neg P(b)$$

$$(ii) P(a) \wedge Q(a) \wedge P(b) \wedge \neg Q(b) \wedge \neg P(c)$$

$$(iii) \forall x \neg P(x, x) \wedge \forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z))$$

## **Aufgabe 2** Tarski's World

Unter <http://www.cs.plattsburgh.edu/~salvador/Tarski/index.html> finden Sie ein Java-Applet für “Tarski's World”, das Sie zum Lösen dieser Aufgabe mitverwenden können.

(a) Geben Sie eine Tarski-Welt an, die ein Modell für alle folgenden prädikatenlogi-

schen Ausdrücke ist:

$$\forall x \exists y \neg \text{SameSize}(x, y) \quad (1)$$

$$\forall x \forall y (\text{Triangle}(x) \wedge \text{Triangle}(y) \wedge \text{SameCol}(x, y) \rightarrow (x = y)) \quad (2)$$

$$\forall x \forall y (\text{Smaller}(x, y) \wedge \text{SameRow}(x, y) \rightarrow \text{LeftOf}(x, y)) \quad (3)$$

$$\text{Pentagon}(b) \wedge \text{Medium}(b) \quad (4)$$

$$\forall x (\text{Square}(x) \leftrightarrow \text{SameSize}(x, c)) \quad (5)$$

$$\exists x \exists y (\text{Triangle}(x) \wedge \text{Square}(y) \wedge \text{Between}(x, a, y)) \quad (6)$$

$$\exists x \exists y (\text{Triangle}(x) \wedge \text{Square}(y) \wedge \text{SameCol}(x, y)) \quad (7)$$

$$\text{Between}(b, a, c) \quad (8)$$

$$\forall x (\text{Pentagon}(x) \rightarrow \exists y (\text{Pentagon}(y) \wedge \neg(x = y) \wedge \text{SameCol}(x, y))) \quad (9)$$

$$\forall x (\text{Square}(x) \wedge \text{Small}(x) \rightarrow (x = a)) \quad (10)$$

Zeichnen Sie eine solche Welt oder drucken Sie eine aus. Für die Semantik der Prädikate ist das o.g. Applet maßgeblich.

(b) Übersetzen Sie folgende Aussagen in prädikatenlogische Aussagen in “Tarski’s World”. Verwenden Sie weder Konstanten noch freie Variablen.

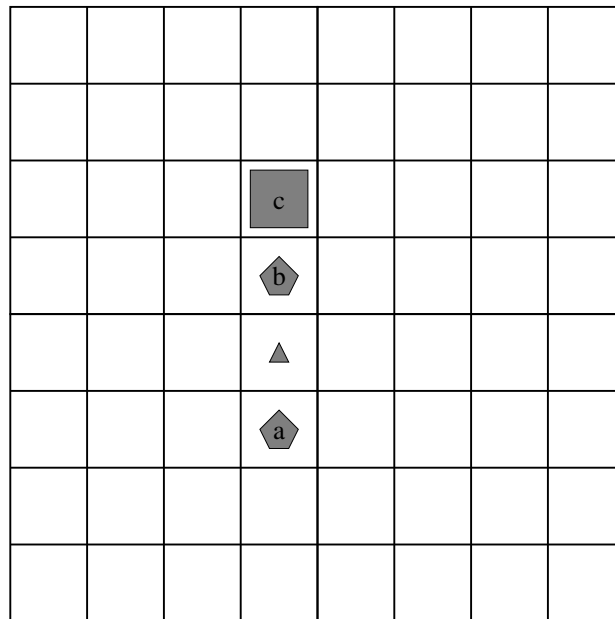
- (i) Kein Quadrat ist zwischen irgendwelchen Objekten.
- (ii) Je weiter links ein Objekt ist, desto größer ist es.
- (iii) Nichts ist zwischen zwei Quadraten.
- (iv) Ein Quadrat, das rechts von einem Dreieck steht, ist groß.

## **Aufgabe 2** (Lösungsvorschlag) *Tarski’s World*

(a) Erläuterungen zu den Formeln:

- (1) Es gibt mindestens zwei verschiedene Größen.
- (2) Pro Spalte gibt es höchstens ein Dreieck.
- (3) In jeder Zeile sind die kleineren Elemente links von den größeren.
- (4)  $b$  ist ein mittelgroßes Fünfeck.
- (5) Alle Vierecke (und nur die Vierecke) haben dieselbe Größe wie  $c$ .
- (6) Es gibt ein Dreieck, das zwischen  $a$  und einem Quadrat liegt.
- (7) Ein Dreieck und ein Quadrat liegen in derselben Spalte.
- (8)  $b$  liegt zwischen  $a$  und  $c$ .
- (9) In jeder Spalte liegen 0 oder mindestens 2 Fünfecke.
- (10) Falls es ein kleines Quadrat gibt, gibt es nur eines, nämlich  $a$ .

Eine Tarski-Welt mit möglichst wenigen Elementen, die alle diese Formeln erfüllt, ist unten abgebildet:



Dabei stehen von oben nach unten:

- das große Quadrat  $c$ ;
- das mittelgroße Fünfeck  $b$ ;
- ein kleines Dreieck;
- das mittelgroße Fünfeck  $a$ .

Eine Lösung mit weniger als vier Elementen ist nicht möglich, denn:

- $b$  muss wegen Bedingung (4) ein Fünfeck sein, und wegen (9) muss es dann noch ein zweites Fünfeck geben;
- wegen (6) und (7) muss es noch ein Dreieck und ein Quadrat geben.

- (b) (i)  $\forall x(Square(x) \rightarrow \neg\exists y\exists z Between(x, y, z))$   
(ii)  $\forall x\forall y(LeftOf(x, y) \rightarrow Larger(x, y))$   
(iii)  $\forall x\forall y(Square(x) \wedge Square(y) \rightarrow \neg\exists z Between(z, x, y))$   
(iv)  $\forall x((Square(x) \wedge \exists y(Triangle(y) \wedge LeftOf(y, x))) \rightarrow Large(x))$

Bildet man die Pränexform dieser Formeln, so ist Folgendes zu beachten: In (i) und (iii) stehen Existenzquantoren hinter einer Negation und auf der rechten Seite einer Implikation. Beim Vorziehen werden sie zu Allquantoren. In (iv) steht der Existenzquantor *ohne* Negation, aber auf der *linken* Seite der Implikation. Beim Vorziehen wird er ebenfalls zum Allquantor! (Merke:  $F \rightarrow G \equiv \neg F \vee G$ .)