

Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 30. November, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 Hilbert-Kalkül

Hinweis: Im Internet finden Sie unter der URL

<http://logik.phl.univie.ac.at/~chris/gateway/hilbert-applethelp.html>

ein Java-Applet, das Sie bei der Durchführung korrekter Herleitungen unterstützt.

- (a) Finden Sie eine Herleitung für folgende Aussage im Hilbert-Kalkül:

$$\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \vdash A \rightarrow C$$

- (b) In der Vorlesung wurde erwähnt, dass die Axiome (4) und (5) nicht zwingend notwendig sind, da man sie auch mit Hilfe der Axiome (1) bis (3) herleiten kann. Zeigen Sie dies für Axiom (4), d.h. zeigen Sie unter Verwendung nur der Axiome (1) bis (3) und Modus Ponens, dass gilt:

$$\vdash F \rightarrow (\neg F \rightarrow G)$$

Der Einfachheit halber dürfen Sie stillschweigend ausnutzen, dass $\neg\neg F \equiv F$ gilt. (Wenn Sie o.g. Applet benutzen, können Sie diese Äquivalenz als "Definition" eingeben.)

- (c) Beweisen Sie: Wenn M erfüllbar ist, ist M auch konsistent. (Die Gegenrichtung wurde in der Vorlesung gezeigt.) Nutzen Sie dazu die *Korrektheit* des Hilbert-Kalküls aus.
- (d) Beweisen Sie die Korrektheit des Hilbert-Kalküls, d.h. zeigen Sie, dass gilt: Aus $M \vdash F$ folgt $M \models F$. Hinweis: Sie können den Beweis durch Induktion führen, d.h. über die Anzahl der Anwendungen des Modus Ponens, die in der Herleitung von $M \vdash F$ benutzt wird.