Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 30. November, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 Hilbert-Kalkül

Hinweis: Im Internet finden Sie unter der URL

`http://logik.phl.univie.ac.at/~chris/gateway/hilbert-applethelp.html`

ein Java-Applet, das Sie bei der Durchführung korrekter Herleitungen unterstützt.

(a) Finden Sie eine Herleitung für folgende Aussage im Hilbert-Kalkül:

$$\{A \to B,\ B \to C\} \vdash A \to C$$

(b) In der Vorlesung wurde erwähnt, dass die Axiome (4) und (5) nicht zwingend notwendig sind, da man sie auch mit Hilfe der Axiome (1) bis (3) herleiten kann. Zeigen Sie dies für Axiom (4), d.h. zeigen Sie unter Verwendung nur der Axiome (1) bis (3) und Modus Ponens, dass gilt:

$$\vdash\ F \to (\neg F \to G)$$

Der Einfachheit halber dürfen Sie stillschweigend ausnutzen, dass $\neg\neg F \equiv F$ gilt. (Wenn Sie o.g. Applet benutzen, können Sie diese Äquivalenz als "Definition" eingeben.)

(c) Beweisen Sie: Wenn M erfüllbar ist, ist M auch konsistent. (Die Gegenrichtung wurde in der Vorlesung gezeigt.) Nutzen Sie dazu die *Korrektheit* des Hilbert-Kalküls aus.

(d) Beweisen Sie die Korrektheit des Hilbert-Kalküls, d.h. zeigen Sie, dass gilt: Aus $M \vdash F$ folgt $M \models F$. Hinweis: Sie können den Beweis durch Induktion führen, d.h. über die Anzahl der Anwendungen des Modus Ponens, die in der Herleitung von $M \vdash F$ benutzt wird.

Aufgabe 1 **(Lösungsvorschlag)** *Hilbert-Kalkül*

Zur Erinnerung: Axiome (1) bis (3) des Hilbert-Kalküls lauten

1. $F \to (G \to F)$
2. $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$
3. $(F \to G) \to (\neg F \to \neg G)$

(a) Wir kürzen $M := \{A \to B, B \to C\}$ ab. Für die Herleitung nutzen wir hauptsächlich Axiom 2, das ja schon fast unserer Aussage entspricht. Hätte Axiom 2 den Wortlaut $(G \to H) \to ((F \to G) \to (F \to H))$, so stünde unsere Aussage ja schon direkt da. So wie es steht, passt die linke Seite von Axiom 2 noch nicht, da müssen wir mit Hilfe von Axiom 1 etwas nachhelfen.

(1) $M \vdash A \to B$ (Hypothese)
(2) $M \vdash B \to C$ (Hypothese)
(3) $M \vdash (B \to C) \to (A \to (B \to C))$ (Instanz von Axiom 1)
(4) $M \vdash A \to (B \to C)$ (Modus Ponens aus (2) und (3))
(5) $M \vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (Axiom 2)
(6) $M \vdash (A \to B) \to (A \to C)$ (Modus Ponens aus (4) und (5))
(7) $M \vdash A \to C$ (Modus Ponens aus (1) und (6))

(b) Zunächst instanziieren wir Axiome 1 und 3, wobei wir bei letzterem die Äquivalenz $F \equiv \neg\neg F$ benutzen, was im Hilbert-Kalkül strenggenommen nicht zulässig ist. (Allerdings würde die Ableitung andernfalls sehr viel komplizierter.)

(1) $\vdash F \to (\neg G \to F)$ (Instanz von Axiom 1)
(2) $\vdash (\neg G \to F) \to (\neg F \to G)$ (Instanz von Axiom 3)

Das gewünschte Ziel folgt dann als Kettenschluss aus (1) und (2). Um diesen Kettenschluss im Hilbert-Kalkül durchzuführen, gehen wir vor wie in Aufgabenteil (a), Schritte (3) bis (7) mit den Ersetzungen $A := F$, $B := (\neg G \to F)$ und $C := (\neg F \to G)$.

(c) Beweis durch Kontraposition: Wenn M inkonsistent ist, ist M unerfüllbar. Sei also M inkonsistent. Dann gibt es nach Definition eine Formel F mit $M \vdash F$ und $M \vdash \neg F$. Da der Hilbert-Kalkül korrekt ist (siehe Aufgabenteil (d)), gilt auch $M \models F$. Das heißt laut Definition wiederum, dass jedes Modell von M auch Modell von F ist. Sei also $\mathcal{A}$ ein Modell von M. Dann gilt $\mathcal{A}(F) = 1$. Analog muss aber auch $\mathcal{A}(\neg F) = 1$ sein. Also kann M kein Modell haben, ist demzufolge unerfüllbar.

(d) Sei F eine Formel, so dass $M \vdash F$ gilt, und sei n die minimale Anzahl der Modus-Ponens-Anwendungen, mit denen F hergeleitet werden kann. Wir zeigen die Korrektheit des Hilbert-Kalküls durch Induktion über n. (Anders ausgedrückt, zeigen wir eine Invariante des Hilbert-Kalküls, nämlich die, dass er nur Formeln herleiten kann, die Folgerungen von M sind.)

Induktionsstart: $n = 0$. Dann ist F entweder die Instanz eines Axioms oder eine Hypothese. Im ersten Fall ist F eine gültige Formel, da alle Axiome gültige Formeln sind. Im zweiten Fall gilt $F \in M$. Alle Modelle von M sind also insbesondere Modelle von F. Also gilt in beiden Fällen $M \models F$.

Induktionsschluss: Die Induktionsannahme gelte für alle $n' \leq n$, und F sei mit mindestens $n + 1$ Modus-Ponens-Schritten herleitbar. Dann gibt es eine Formel G, so dass $M \vdash (G \to F)$ und $M \vdash G$, und sowohl G als auch $G \to F$ sind mit höchstens n Anwendungen des Modus Ponens herleitbar. Also gilt laut Induktionsannahme $M \models G \to F$ und $M \models G$. Sei nun $\mathcal{A}$ ein Modell von M. Dann gilt $\mathcal{A}(G) = 1$ und $\mathcal{A}(G \to F) = 1$, was nur möglich ist, wenn auch $\mathcal{A}(F) = 1$ gilt. Also gilt $M \models F$.