Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 23. November, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 DPLL-Verfahren

(a) Führen Sie das DPLL-Verfahren mit folgenden Formeln durch. Welche von ihnen sind erfüllbar?

$$F_1 = \neg A \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$
$$F_2 = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee A)$$
$$F_3 = (A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg A) \wedge (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)$$
$$F_4 = (A \vee \neg E) \wedge (\neg C \vee \neg D) \wedge (\neg A \vee B \vee D) \wedge (C \vee D \vee \neg E) \wedge (\neg A \vee \neg E) \wedge (\neg B \vee \neg E)$$

(b) Konstruieren Sie eine Formel F mit genau einer erfüllenden Belegung, so dass jede maximale Herleitung des DPLL-Verfahrens für F eine Anwendung der Splitting-Regel enthält.

Aufgabe 2 BDDs allgemein

Sei $F := (x \vee y) \rightarrow z$ und $G := x \leftrightarrow (y \wedge z)$, wobei $x < y < z$ gilt.

(a) Zeichnen Sie BDDs für F und G.

(b) In der Vorlesung wurde ein Algorithmus vorgestellt, der den Oder-Operator auf BDDs implementiert. Gewinnen Sie daraus einen BDD für $F \vee G$.

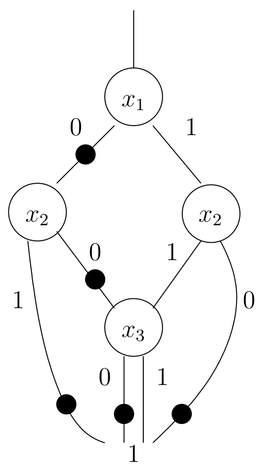
(c) Wie müsste man den Algorithmus aus der Vorlesung abwandeln, um einen BDD für $F \wedge G$ zu erhalten?

(d) Sei $H := ((z \leftrightarrow (x \oplus y)) \wedge (w \leftrightarrow (y \vee z)) \vee x \vee (u \leftrightarrow (x \vee w))$. Zeichnen Sie einen BDD für H. Wie viele erfüllende Belegungen hat H? Überlegen Sie, wie Sie diese Antwort direkt aus dem BDD ablesen können.
Hinweis: Sie können den BDD entweder selbst berechnen oder eines der BDD-Tols von der Vorlesungs-Webseite dafür benutzen. Bestimmen Sie die Anzahl der erfüllenden Belegungen, die es von jedem einzelnen Knoten aus gibt, und beginnen Sie bei den "untersten" Knoten.

(e) Überlegen Sie, wie man BDDs einsetzen könnte, um die Spiele Sudoku und Minesweeper zu lösen. Denken Sie an die Diskussionen aus den vorangegangenen Übungen. Wie löst man die dabei besprochenen Probleme?

Aufgabe 3 Komplementkanten

Eine Variante von BDDs, mit der man oft kleinere Graphen erhält, sind *BDDs mit Komplementkanten* (KBDDs). Ein Beispiel für einen KBDD sehen Sie unten abgebildet. In einem KBDD können Kanten positiv oder negativ auftreten (in der Zeichnung unten sind negative Kanten mit einem schwarzen Kreis markiert). Außerdem entfällt das Blatt mit der 0, und die Wurzel des KBDD wird mit einer eingehenden Kante versehen.
Die Semantik einer negativen Kante ist, dass der Untergraph, der beim Zielknoten beginnt, als das Komplement der Formel gewertet wird, die er normalerweise darstellen würde. Eine negative Kante zum 1-Knoten wird z.B. als Kante zum 0-Knoten gewertet. Der mit x_3 beschriftete Knoten stellt daher die Formel x_3 dar, der linke der beiden x_2-Knoten aber die Formel $\neg x_2 \wedge \neg x_3$. Die eingehende Kante der Wurzel zeigt an, ob die dem KBDD entsprechende Formel oder ihr Komplement gemeint ist. Im Beispiel unten ist die eingehende Kante der Wurzel positiv.



(a) Stellen Sie die Wahrheitstafel für die Formel auf, die dem oben abgebildeten KBDD mit Komplementkanten entspricht.

(b) KBDDs sind i.A. nicht mehr eindeutig, d.h. es kann mehrere KBDDs geben, die dieselbe Formel darstellen. Finden Sie zwei Paare von KBDDs, die dieselbe Formel darstellen.

(c) KBDDs lassen sich allerdings eindeutig machen, wenn man darauf verzichtet, negative 0-Kanten zu benutzen. Zeigen Sie dazu, dass folgende Äquivalenz gilt:

$$ite(x, F, \neg G) \equiv \neg ite(x, \neg F, G)$$

Benutzen Sie diese Äquivalenz, um den oben abgebildeten KBDD in den eindeutigen KBDD zu transformieren, der keine negativen 0-Kanten enthält.