

## Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 16. November, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

### Aufgabe 1    Hornformeln

- (a) Gegeben seien folgende Formeln. Welche von ihnen sind Hornformeln?

$$F_1 = (\neg A \vee \neg D \vee B) \wedge D \wedge \neg B \wedge E \wedge (\neg D \vee \neg E \vee C)$$

$$F_2 = (A \rightarrow C) \wedge (D \rightarrow E) \wedge (1 \rightarrow B) \wedge (C \wedge A \rightarrow D) \wedge (B \rightarrow A) \wedge \\ (B \rightarrow E) \wedge (D \wedge E \rightarrow 0)$$

$$F_3 = (\neg A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E \vee C) \wedge C \wedge (\neg C \vee E \vee B) \wedge \neg B$$

$$F_4 = (A \rightarrow E) \wedge (B \rightarrow 0) \wedge (C \rightarrow B) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (E \wedge B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D)$$

- (b) Führen Sie für diejenigen Formeln aus (a), die Hornformeln sind, den Erfüllbarkeitstest durch. Welche davon sind erfüllbar?
- (c) Der Erfüllbarkeitstest für Hornformeln liefert nur diejenigen Variablen, die zwingend auf 1 gesetzt werden müssen, um die Formel zu erfüllen. Überlegen Sie sich, wie das Verfahren erweitert werden kann, um auch diejenigen Variablen zu erhalten, die zwingend 0 sein müssen.
- (d) Seien  $A, B$  atomare Formeln. Betrachten Sie die Formeln  $A \circ B$  für alle 16 möglichen Junktoren  $\circ$ , und finden Sie alle diejenigen, die sich nicht äquivalent als Hornformeln ausdrücken lassen.

### Aufgabe 2    Aussagenlogische Resolution

- (a) Frau Krenk ist krank. Ihr Arzt empfiehlt ihr:

- Sie muss mindestens eines der Medikamente  $A, B$  oder  $C$  nehmen.
- Wenn sie  $A$  nimmt, muss sie auch  $C$  nehmen.
- Wenn sie  $B$  nimmt, muss sie auch  $A$  nehmen und darf nicht  $C$  nehmen.
- Wenn sie  $C$  nimmt, darf sie  $B$  nicht nehmen.

Frau Krenk fragt auch ihre Nachbarin. Diese rät ihr,  $C$  nicht zu nehmen.

Geben Sie eine aussagenlogische Formel  $F$  an, die die Empfehlungen des Arztes und der Nachbarin formalisiert. Verwenden Sie Aussagenvariablen  $A$ ,  $B$  und  $C$ . Bringen Sie sodann  $F$  in konjunktive Normalform und versuchen Sie, mit dem Resolutionsverfahren die leere Klausel herzuleiten. Sind die Empfehlungen des Arztes und der Nachbarin miteinander vereinbar?

- (b) Eine Klausel heißt *positiv*, falls sie nur positive Literale enthält. Sei  $M$  eine endliche Menge von Klauseln, die alle *nicht positiv* sind. Zeigen Sie, dass dann die leere Klausel im Resolutionsverfahren nicht aus  $M$  herleitbar ist.

### Aufgabe 3 BDDs

Der dreistellige Junktore *ite* (if-then-else) sei wie folgt definiert:

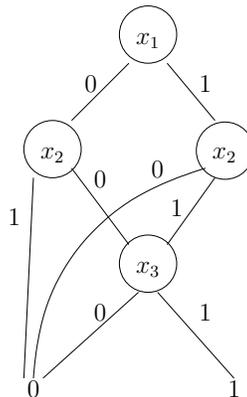
$$ite(F, G, H) \equiv (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge H)$$

Die Menge der Formeln, die sich in *ite*-Normalform befinden, sind induktiv wie folgt definiert:

- Die Formeln 0 (unerfüllbare Formel) und 1 (Tautologie) sind in *ite*-Normalform.
  - Eine Formel  $ite(A, F, G)$  ist in *ite*-Normalform, wenn  $A$  eine atomare Formel ist und  $F, G$  in *ite*-Normalform sind.
- (a) Zeigen Sie, dass jede Formel der Aussagenlogik äquivalent zu einer Formel in *ite*-Normalform ist.

*Hinweis:* Für die Zwecke dieser Aufgabe könnte es sich als hilfreich erweisen, die Notation  $F[A/b]$  zu verwenden, wobei  $A$  eine atomare Formel und  $b \in \{0, 1\}$  sei, und  $F[A/b]$  die Formel ist, die entsteht, wenn alle Vorkommen von  $A$  in  $F$  durch  $b$  ersetzt werden.

- (b) BDDs lassen sich besonders leicht in *ite*-Normalformen umwandeln. (Überlegen Sie sich, warum!) Geben Sie eine *ite*-Normalform für den untenstehenden BDD an.



Welche Eigenschaften haben die aus BDDs abgeleiteten *ite*-Formeln zusätzlich gegenüber allgemeinen *ite*-Formeln?

- (c) Wie viele Knoten kann ein BDD mit 4 Variablen höchstens haben? Wie viele ein BDD mit 5 oder 6 Variablen?

*Hinweis:* Überlegen Sie sich jeweils, wie viele Knoten es jeweils geben kann, die mit der  $i$ -ten Variable der Ordnung beschriftet sind, für  $i = 1$  bis 4 (bzw. 5 oder 6).