Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 16. November, um 11:50 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 Hornformeln

(a) Gegeben seien folgende Formeln. Welche von ihnen sind Hornformeln?

$$F_1 = (\neg A \vee \neg D \vee B) \wedge D \wedge \neg B \wedge E \wedge (\neg D \vee \neg E \vee C)$$
$$F_2 = (A \rightarrow C) \wedge (D \rightarrow E) \wedge (1 \rightarrow B) \wedge (C \wedge A \rightarrow D) \wedge (B \rightarrow A) \wedge (B \rightarrow E) \wedge (D \wedge E \rightarrow 0)$$
$$F_3 = (\neg A \vee B) \wedge (\neg D \vee \neg E \vee C) \wedge C \wedge (\neg C \vee E \vee B) \wedge \neg B$$
$$F_4 = (A \rightarrow E) \wedge (B \rightarrow 0) \wedge (C \rightarrow B) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (E \wedge B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D)$$

(b) Führen Sie für diejenigen Formeln aus (a), die Hornformeln sind, den Erfüllbarkeitstest durch. Welche davon sind erfüllbar?

(c) Der Erfüllbarkeitstest für Hornformeln liefert nur diejenigen Variablen, die zwingend auf 1 gesetzt werden müssen, um die Formel zu erfüllen. Überlegen Sie sich, wie das Verfahren erweitert werden kann, um auch diejenigen Variablen zu erhalten, die zwingend 0 sein müssen.

(d) Seien A, B atomare Formeln. Betrachten Sie die Formeln $A \circ B$ für alle 16 möglichen Junktoren $\circ$, und finden Sie alle diejenigen, die sich nicht äquivalent als Hornformeln ausdrücken lassen.

Aufgabe 1 **(Lösungsvorschlag)** *Hornformeln*

(a) F_1, F_2, F_4 sind Hornformeln, F_3 ist keine wegen der vorletzten Klausel (zwei positive Literale sind nicht erlaubt).

(b) F_1: Zunächst werden D und E markiert, dann wegen der letzten Klausel auch C. Der Algorithmus terminiert mit der Ausgabe "erfüllbar".

F_2: Zunächst wird B markiert. Daraus folgt die Markierung von A und E. Wegen A wird C markiert, und wegen A und C auch D. Die Klausel $D \wedge E \rightarrow 0$ führt dann zur Ausgabe "unerfüllbar".

F_4: Es wird erst A markiert, dann wegen der ersten Klausel E. Der Algorithmus terminiert mit der Ausgabe "erfüllbar".

(c) Zur Klarstellung: Mit "eine Variable A in der Formel F ist zwingend 1 (bzw. 0)" meinen wir, dass in jeder Belegung $\mathcal{A}$, die F erfüllt, $\mathcal{A}(A) = 1$ (bzw. 0) gilt. Mit anderen Worten, $F \models A$ bzw. $F \models \neg A$. Im Folgenden reden wir kurz von 1-Variablen bzw. 0-Variablen.

Um die 0-Variablen zu finden, machen wir uns die Tatsache zunutze, dass gilt:

$$F \wedge A \text{ unerfüllbar} \qquad \Longleftrightarrow \qquad F \models \neg A$$

Wir führen also für jede Variable A in F folgenden Test durch:

> Erweitere F um eine Klausel $1 \rightarrow A$ und führe den Markierungsalgorithmus durch. Liefert er "unerfüllbar", so ist A eine 0-Variable.

Obiges Verfahren löst die gestellte Aufgabe bereits. Es ist allerdings aufwändig (ein Test pro Variable). In der Tat ist es bei Hornformel leichter, 1-Variablen als 0-Variablen zu finden. Intuitiv liegt dies letztlich an der "unbalancierten" Definition der Hornformeln, die Klauseln mit beliebig vielen negativen, aber maximal einer positiven Variablen zulassen.

Dennoch lässt sich obiges Verfahren effizienter gestalten. Führen wir z.B. zunächst einmal den normalen Markierungsalgorithmus durch. Wenn er erfüllbar liefert, dann können wir F vereinfachen, indem wir die gefundenen 1-Variablen gedanklich auf 1 setzen und sie aus F eliminieren, wie folgt:

- jede Klausel, auf deren rechter Seite eine 1-Variable steht, wird gestrichen;
- in jeder anderen Klausel werden die 1-Variablen aus der linken Seite entfernt.

Im Folgenden arbeiten wir dann mit der daraus entstandenen, vereinfachten Formel F'. (Welche logische Beziehung besteht zwischen F und F'?)

Danach führt man folgende Schritte durch:

1. Jede Variable A, die in einer Klausel der Form $A \rightarrow 0$ vorkommt, ist eine 0-Variable.
2. Gibt es eine Regel $A \rightarrow B$, und ist B bereits eine 0-Variable, so ist auch A eine Null-Variable.
3. Schritt 2 wird wiederholt, so oft es geht.

Man beachte jedoch, dass dieses vereinfachte Verfahren nicht vollständig ist. Es erkennt zum Beispiel nicht, dass $F \models \neg A$ gilt in $F = (A \rightarrow B) \wedge (A \wedge B \rightarrow 0)$. Dennoch kann man erstmal das vereinfachte Verfahren ausprobieren, dadurch die Formel vereinfachen, und dann muss man das obige, vollständige Verfahren nur noch auf F' durchführen.

Beispiel: Die Formel F_1 vereinfacht sich nach dem Markierungsalgorithmus zu: $F_1' = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow 0)$. Mit dem vereinfachten Verfahren erhält man, dass B und A 0-Variablen sind.

Die Formel F_4 vereinfacht sich zu $F_4' = (B \to 0) \wedge (C \to B) \wedge (B \to C) \wedge (C \to D)$. Wir erkennen, dass B und C Null-Variablen sind. Ersetzt man B und C in F_4' durch 0, so bleibt eine Tautologie übrig. Der Wert von D ist also beliebig.

(d) Bis auf $A \vee B$ und $A \oplus B$ (der Oder- und der Exklusiv-Oder-Junktor) lassen sich alle 16 Junktoren durch eine Hornformel ausdrücken. In der untenstehenden Tabelle charakterisieren die vier linken Spalten den jeweiligen Junktor, d.h. in der Spalte 00 steht das Ergebnis für $0 \circ 0$ usw.

00	01	10	11	KNF	Horn-Notation
0	0	0	0	$A \wedge \neg A$	$(1 \to A) \wedge (A \to 0)$
0	0	0	1	$A \wedge B$	$(1 \to A) \wedge (1 \to B)$
0	0	1	0	$A \wedge \neg B$	$(1 \to A) \wedge (B \to 0)$
0	0	1	1	A	$(1 \to A)$
0	1	0	0	$\neg A \wedge B$	$(A \to 0) \wedge (1 \to B)$
0	1	0	1	B	$(1 \to B)$
0	1	1	0	n/a	n/a
0	1	1	1	n/a	n/a
1	0	0	0	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \to 0) \wedge (B \to 0)$
1	0	0	1	$(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$
1	0	1	0	$\neg B$	$(B \to 0)$
1	0	1	1	$A \vee \neg B$	$(B \to A)$
1	1	0	0	$\neg A$	$(A \to 0)$
1	1	0	1	$\neg A \vee B$	$(A \to B)$
1	1	1	0	$\neg A \vee \neg B$	$(A \wedge B \to 0)$
1	1	1	1	$A \vee \neg A$	$(A \to A)$

Wir beweisen die Nicht-Existenz der beiden verbliebenen Fälle nun formal: Angenommen, F sei eine Formel, die die Variablen A und B (und vielleicht noch andere) enthält. Außderdem gelte für jede passende Belegung $\mathcal{A}$:

(i) falls $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = 0$, dann $\mathcal{A}(F) = 0$;

(ii) falls $\mathcal{A}(A) = 0$ und $\mathcal{A}(B) = 1$, dann $\mathcal{A}(F) = 1$;

(iii) falls $\mathcal{A}(A) = 1$ und $\mathcal{A}(B) = 0$, dann $\mathcal{A}(F) = 1$.

(Man beachte, dass $A \vee B$ und $A \oplus B$ diese Bedingungen erfüllen.) Angenommen, es gäbe eine Hornformel F' (in KNF-Darstellung) mit $F' \equiv F$. Dann hat F' die Form $F_1 \wedge \cdots \wedge F_n$, wobei die obigen Bedingungen (ii) und (iii) auch für jedes F_i, $i = 1, \ldots, n$ gelten. Außerdem gibt es wegen Bedingung (i) mindestens eine Klausel F_i und mindestens eine Belegung $\mathcal{A}$, bei der $\mathcal{A}(A) = \mathcal{A}(B) = 0$ und $\mathcal{A}(F_i) = 0$ ist.

Offensichtlich ist $\neg A$ nicht in F_i enthalten. Nehmen wir an, auch A sei nicht in F_i enthalten. Dann aber wäre der Wahrheitswert von F_i gänzlich unabhängig von A. Betrachten wir die Belegung $\mathcal{A}'$ mit $\mathcal{A}'(A) = 1$, die ansonsten mit $\mathcal{A}$ übereinstimmt, so gälte dann $\mathcal{A}'(F_i) = \mathcal{A}(F_i) = 0$, was im Widerspruch zur Bedingung (iii) steht.

Die Klausel F_i muss also A enthalten. Analog argumentiert man, dass F_i auch B enthält. F_i enthält also zwei positive Variablen, demnach ist F' keine Hornformel.

Aufgabe 2 Aussagenlogische Resolution

(a) Frau Krenk ist krank. Ihr Arzt empfiehlt ihr:

- Sie muss mindestens eines der Medikamente A, B oder C nehmen.
- Wenn sie A nimmt, muss sie auch C nehmen.
- Wenn sie B nimmt, muss sie auch A nehmen und darf nicht C nehmen.
- Wenn sie C nimmt, darf sie B nicht nehmen.

Frau Krenk fragt auch ihre Nachbarin. Diese rät ihr, C nicht zu nehmen.

Geben Sie eine aussagenlogische Formel F an, die die Empfehlungen des Arztes und der Nachbarin formalisiert. Verwenden Sie Aussagenvariablen A, B und C. Bringen Sie sodann F in konjunktive Normalform und versuchen Sie, mit dem Resolutionsverfahren die leere Klausel herzuleiten. Sind die Empfehlungen des Arztes und der Nachbarin miteinander vereinbar?

(b) Eine Klausel heißt *positiv*, falls sie nur positive Literale enthält. Sei M eine endliche Menge von Klauseln, die alle *nicht positiv* sind. Zeigen Sie, dass dann die leere Klausel im Resolutionsverfahren nicht aus M herleitbar ist.

Aufgabe 2 **(Lösungsvorschlag)** *Resolution*

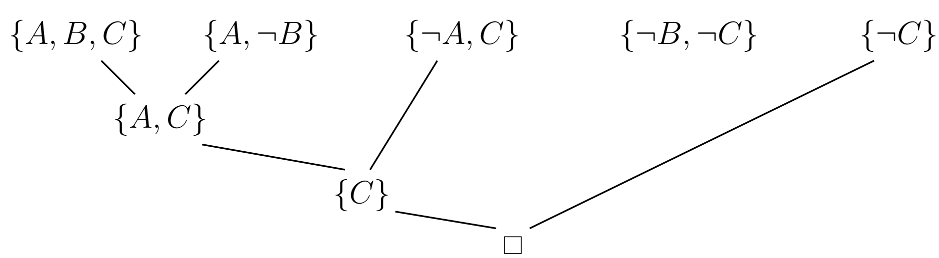
(a) Eine mögliche Formalisierung ist:

$$F = (A \vee B \vee C) \quad \wedge \quad (A \rightarrow C) \quad \wedge \quad (B \rightarrow (A \wedge \neg C)) \quad \wedge \quad (C \rightarrow \neg B) \quad \wedge \quad \neg C$$

Überführung in KNF:

$$F \equiv (A \vee B \vee C) \quad \wedge \quad (\neg A \vee C) \quad \wedge \quad (\neg B \vee A) \quad \wedge \quad (\neg B \vee \neg C) \quad \wedge \quad (\neg C \vee \neg B) \quad \wedge \quad \neg C$$

Resolutionsbeweis:



Da man die leere Klausel ableiten kann, sind die Empfehlungen des Arztes und der Nachbarin nicht miteinander vereinbar.

(b) Nach Definition ist eine Klausel *nicht positiv*, wenn sie mindestens ein negatives Literal enthält. Den Beweis können wir auf zwei Weisen führen:

1. M ist erfüllbar, denn die Belegung, die allen Aussagevariablen den Wahrheitswert 0 zuweist, erfüllt alle Klauseln in M, also auch M als Ganzes. Wegen der Vollständigkeit der Resolution (siehe Seite 9 der Folien über Resolution) kann die leere Klausel nicht aus einer erfüllbaren Formel hergeleitet werden.
2. Alternativ können wir auch rein syntaktisch argumentieren, d.h. wir zeigen, dass der Ablauf des Resolutionsverfahrens folgende Invariante aufrecht erhält:

   Für alle $n \geq 0$ gilt: $Res^n(M)$ enthält keine positive Klausel.

   Die Unmöglichkeit, die die leere Klausel herzuleiten, folgt aus dieser Behauptung, denn wir bräuchten dazu zwei Klauseln der Form $\{A\}$ und $\{\neg A\}$ für eine atomare Formel A, die Klausel $\{A\}$ ist jedoch positiv. Wir zeigen obige Behauptung per Induktion über n.

   Induktionsanfang: Obige Behauptung gilt laut Voraussetzung für $n = 0$.

   Induktionsschluss: Obige Behauptung gelte bereits für alle $n' \leq n$. Sei $R \in Res^{n+1}(M)$. Dann ist R der Resolvent aus zwei Klauseln $K_1, K_2 \in Res^n(M)$. O.b.d.A. gibt es eine Variable A, so dass A positiv in K_1 und negativ in K_2 auftaucht, d.h. $R = (K_1 \setminus \{A\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg A\})$. Laut Annahme ist K_1 nicht positiv, enthält also ein negatives Literal, das auch in R enthalten ist. Ergo ist auch R nicht positiv.

Aufgabe 3 BDDs

Der dreistellige Junktor *ite* (if-then-else) sei wie folgt definiert:

$$ite(F, G, H) \equiv (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge H)$$

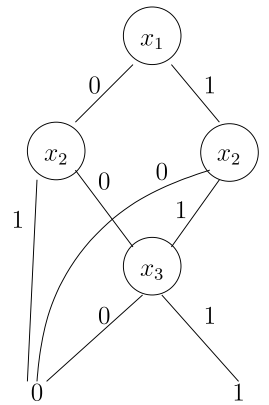
Die Menge der Formeln, die sich in *ite*-Normalform befinden, sind induktiv wie folgt definiert:

- Die Formeln 0 (unerfüllbare Formel) und 1 (Tautologie) sind in *ite*-Normalform.
- Eine Formel $ite(A, F, G)$ ist in *ite*-Normalform, wenn A eine atomare Formel ist und F, G in *ite*-Normalform sind.

(a) Zeigen Sie, dass jede Formel der Aussagenlogik äquivalent zu einer Formel in *ite*-Normalform ist.

Hinweis: Für die Zwecke dieser Aufgabe könnte es sich als hilfreich erweisen, die Notation $F[A/b]$ zu verwenden, wobei A eine atomare Formel und $b \in \{0, 1\}$ sei, und $F[A/b]$ die Formel ist, die entsteht, wenn alle Vorkommen von A in F durch b ersetzt werden.

(b) BDDs lassen sich besonders leicht in *ite*-Normalformen umwandeln. (Überlegen Sie sich, warum!) Geben Sie eine *ite*-Normalform für den untenstehenden BDD an.



Welche Eigenschaften haben die aus BDDs abgeleiteten *ite*-Formeln zusätzlich gegenüber allgemeinen *ite*-Formeln?

(c) Wie viele Knoten kann ein BDD mit 4 Variablen höchstens haben? Wie viele ein BDD mit 5 oder 6 Variablen?

Hinweis: Überlegen Sie sich jeweils, wie viele Knoten es jeweils geben kann, die mit der i-ten Variable der Ordnung beschriftet sind, für $i = 1$ bis 4 (bzw. 5 oder 6).

Aufgabe 3 **(Lösungsvorschlag)** *BDDs*

(a) Sei F eine Formel der Aussagenlogik. Wir zeigen die Aussage für alle Formeln der Aussagenlogik und zusätzlich für diejenigen, die auch die Konstanten 0 und 1 enthalten (mit der üblichen Bedeutung).

Wir führen den Beweis durch Induktion über die Anzahl n der verschiedenen Variablen, die in F vorkommen.

Induktionsanfang ($n = 0$): Wenn F keine Variablen enthält, ist es entweder eine Tautologie oder unerfüllbar. Dann ist F äquivalent zu der *ite*-Normalform 1 bzw. 0.

Induktionsschluss: Jede Formel mit höchstens n Variablen lasse sich äquivalent in *ite*-Normalform bringen. Sei F eine Formel mit $n + 1$ Variablen, und A sei eine davon. Dann sei $F_1 := F[A/1]$ und $F_0 := F[A/0]$, und F ist äquivalent zu $ite(A, F_1, F_0)$. Da F_1, F_0 höchstens n Variablen enthalten, lassen sie sich laut Induktionsvoraussetzung in *ite*-Normalform bringen.

(b) Ein BDD mit einer x-beschrifteten Wurzel und Unterbäumen B_1 und B_0 gibt folgende Belegung wieder: Wenn $x = 1$ ist, so soll der Unterbaum B_1 ausgewertet werden, sonst B_0. Also entspricht solch ein BDD der Formel $ite(x, F_1, F_0)$, wobei F_1 bzw. F_0 die Formeln sind, die B_1 bzw. B_0 entsprechen.

Für den BDD in der Aufgabe ergibt sich:

$$ite(x_1, ite(x_2, ite(x_3, 1, 0), 0), ite(x_2, 0, ite(x_3, 1, 0)))$$

Eine Formel F, die aus so aus einem BDDs abgeleitet wird, hat folgende spezielle Eigenschaften:

- Ist $ite(x, F_1, F_0)$ eine Unterformel von F und $x > y$, so kommt y nicht in F_1 oder F_0 vor (folgt aus Bedingung (5) von binären Entscheidungsbäumen).
- Ist $ite(x, F_1, F_0)$ eine Unterformel von F, dann gilt $F_1 \not\equiv F_0$ (folgt aus der Elimination redundanter Knoten.

Die Wiederverwendung gleicher Unterdiagramme, die man in BDDs hat, lässt sich in *ite*-Normalform nicht abbilden.

(c) Sei n die Anzahl der Elemente in der Variablenordnung, und sei x_i die i-te Variable in der Ordnung. Die maximale Anzahl der BDD-Knoten, die mit x_i beschriftet sind, sei mit N_i^n bezeichnet. N_i^n ist zwei Beschränkungen unterworfen:

- "Von oben": Da jeder Knoten zwei Kinder hat, sind maximal 2^{i-1} auf der i-ten Ebene erreichbar.
- "Von unten": Sei $S_i^n := 2 + \sum_{j=i+1}^{n} N_j^n$ die Anzahl der möglichen Kinder eines mit x_i beschrifteten Knoten. Da es keine redundanten Knoten geben darf, muss jeder Knoten zwei verschiedene Kinder haben; da gleiche Unterdiagramme vereinigt werden, muss jeder mit x_i beschriftete Knoten ein unterschiedliches (geordnetes) Paar von Kindern haben. Die Anzahl solcher Möglichkeiten ist $S_i^n \cdot (S_i^n - 1)$.

Also ist $N_i^n = \min\{2^{i-1}, S_i^n \cdot (S_i^n - 1)\}$. Es ergibt sich folgendes Bild:

N_i^n	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	Summe
$n = 4$	1	2	4	2			9
$n = 5$	1	2	4	8	2		17
$n = 6$	1	2	4	8	12	2	29

Bemerkung: Die Summen enthalten noch nicht die beiden Blätter, mit diesen wären es noch zwei Knoten mehr.