Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 9. November, um 12 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 *Begriffe aus der Semantik*

Seien F, G zwei aussagenlogische Formeln, die *keine gemeinsamen Aussagevariablen* enthalten. Zeigen Sie, dass dann die folgenden beiden Aussagen (1) und (2) äquivalent sind, d.h., zeigen Sie, dass (1) genau dann gilt, wenn (2) gilt.

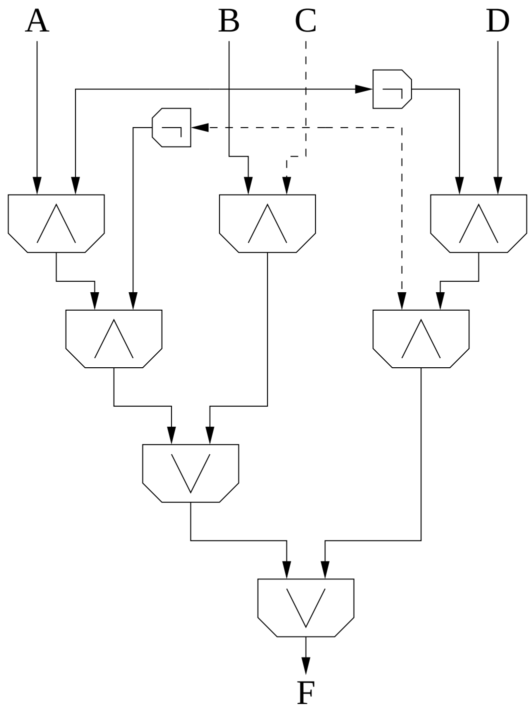
(1) $F \models G$

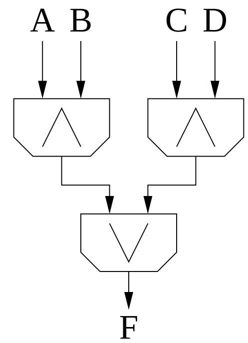
(2) F ist unerfüllbar, oder G ist eine Tautologie.

Hinweis: Sie können hier nicht ausschließlich mit semantisch äquivalenten Umformungen argumentieren. Benutzen Sie die Definitionen der in (1) und (2) verwendeten Begriffe.

Aufgabe 2 *Schaltkreise*

(a) Sie arbeiten in einer Elektronik-Firma und haben für Ihre Arbeit das unten links abgebildete Schaltnetz entworfen, das aus vier Eingaben A, B, C, D eine Ausgabe F berechnet (die von C ausgehenden Kanten sind der Übersichtlichkeit halber gestrichelt). Ein Kollege sieht das Schaltnetz und findet es viel zu kompliziert. Er entwirft das unten rechts abgebildete Schaltnetz und behauptet, dass es dieselbe Aufgabe erfüllt. Hat der Kollege recht? Benutzen Sie Limboole, um herauszufinden, ob beide Schaltnetze äquivalent sind. Wenn nicht, gibt es eine Eingabe, für die beide Schaltnetze unterschiedliche Ausgaben liefern?





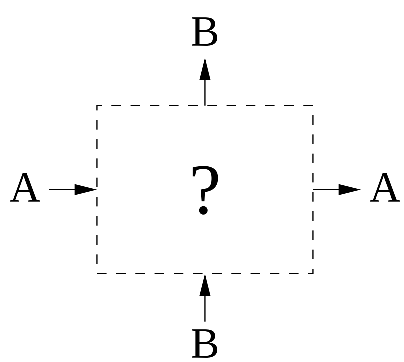
(b) Der binäre Junktor XOR (auch $\oplus$ geschrieben) ist derjenige, der als Ausgabe eine 1 liefert, wenn genau eine von beiden Eingaben 1 ist und die andere 0. Sie haben AND-, OR- und Negationsgatter zur Verfügung. Bauen Sie aus diesen ein Schaltnetz mit zwei Eingängen und einem Ausgang zusammen, wobei

i) die Ausgabe die XOR-Verknüpfung der beiden Eingaben liefert und

ii) das Schaltnetz planar ist, d.h. keine sich kreuzenden Drähte enthält.

Benutzen Sie Limboole, um die korrekte Funktionsweise ihrer Schaltung zu verifizieren.

(c) Sie haben drei XOR-Gatter und keine anderen Gatter zur Verfügung. Konstruieren Sie ein planares Schaltnetz, das untenstehende Funktion erfüllt, d.h. die beiden Eingaben kreuzen sich in der Schaltung und werden auf der anderen Seite wieder ausgegeben.



Aufgabe 3 *Zweistellige Junktoren*

Identifiziert man einen zweistelligen Junktor mit seinem Wahrheitswerteverlauf in der Wahrheitstafel, so gibt es 16 verschiedene zweistellige Junktoren. Sie wissen bereits, dass die Junktoren NAND (nicht-und) sowie NOR (nicht-oder) eine Junktorbasis bilden. (Rufen Sie sich in Erinnerung, warum!) Zeigen Sie, dass für jeden Junktor $\circ$ außer NAND und NOR gilt: $\{\circ\}$ ist keine Junktorbasis.

Hinweis: Sie können die Beweise für mehrere dieser 14 Junktoren zusammenfassen. Überlegen Sie sich z.B., was passiert, wenn $1 \circ 1 = 1$ gilt. (Dies ist bei acht Junktoren der Fall.)

Aufgabe 4 *Endlichkeitssatz*

Sei M eine unendliche Formelmenge und F eine Formel. Zeigen Sie mithilfe des Endlichkeitssatzes, dass dann folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

(1) $M \models F$

(2) Es gibt eine endliche Teilmenge $N \subset M$, sodass $N \models F$ gilt.