Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 9. November, um 12 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 Begriffe aus der Semantik

Seien F, G zwei aussagenlogische Formeln, die *keine gemeinsamen Aussagevariablen* enthalten. Zeigen Sie, dass dann die folgenden beiden Aussagen (1) und (2) äquivalent sind, d.h., zeigen Sie, dass (1) genau dann gilt, wenn (2) gilt.

(1) $F \models G$

(2) F ist unerfüllbar, oder G ist eine Tautologie.

Hinweis: Sie können hier nicht ausschließlich mit semantisch äquivalenten Umformungen argumentieren. Benutzen Sie die Definitionen der in (1) und (2) verwendeten Begriffe.

Aufgabe 1 (Lösungsvorschlag) *Begriffe aus der Semantik*

Hinweis: Im Folgenden wird die Notation "$\forall\mathcal{A}$" informell als Abkürzung benutzt, um auszudrücken: "Für alle passenden Belegungen $\mathcal{A}$ gilt…".

Setzen wir zunächst die Definitionen von (1) und (2) ein:

$$\begin{aligned}
&F \models G\\
\iff &\forall\mathcal{A}\big(\mathcal{A}(F) = 1 \ \rightarrow\ \mathcal{A}(G) = 1\big)\\
\iff &\forall\mathcal{A}\big(\mathcal{A}(F) = 0 \ \vee\ \mathcal{A}(G) = 1\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&F \text{ ist unerfüllbar oder } G \text{ ist eine Tautologie}\\
\iff &\forall\mathcal{A}(\mathcal{A}(F) = 0) \quad\vee\quad \forall\mathcal{A}(\mathcal{A}(G) = 1)
\end{aligned}$$

Letztlich müssen wir also zeigen:

$$\forall\mathcal{A}\big(\mathcal{A}(F) = 0 \ \vee\ \mathcal{A}(G) = 1\big) \qquad \iff \qquad \forall\mathcal{A}(\mathcal{A}(F) = 0) \quad\vee\quad \forall\mathcal{A}(\mathcal{A}(G) = 1)$$

Die Richtung "$\Leftarrow$" ist trivial. Für die Richtung "$\Rightarrow$" argumentieren wir mit Kontraposition: Nehmen wir an, dass die rechte Seite nicht gilt. Dann existiert eine Belegung $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}(F) = 1$ und eine Belegung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(G) = 0$. Daraus konstruieren wir eine Belegung $\mathcal{C}$ wie folgt:

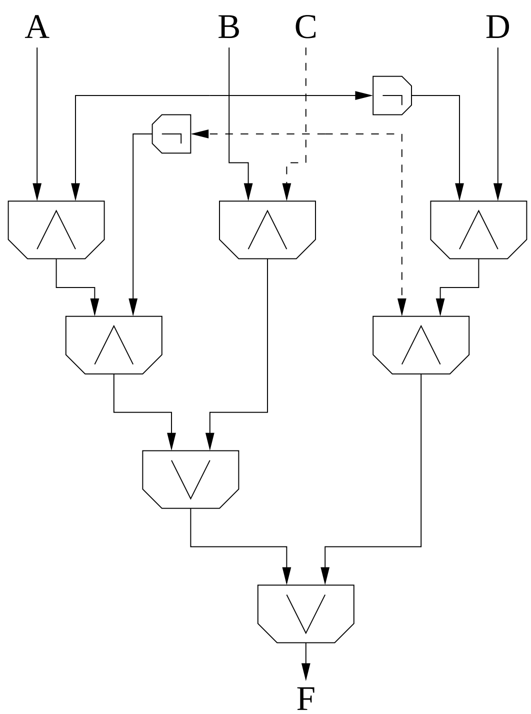
$$\mathcal{C}(A) = \begin{cases} \mathcal{A}(A) & \text{falls } A \text{ in } F \text{ vorkommt}\\ \mathcal{B}(A) & \text{falls } A \text{ in } G \text{ vorkommt}\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

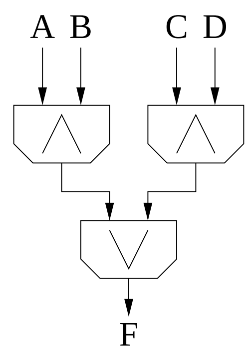
Man beachte, dass $\mathcal{C}$ nur deshalb wohldefiniert ist, weil F und G keine gemeinsamen Variablen haben. Es folgt, dass $\mathcal{C}(F) = 1$ und $\mathcal{C}(G) = 0$ ist, weshalb die linke Seite nicht gilt. Damit ist die Richtung "$\Rightarrow$" des Beweises gezeigt.

Hinweis: Die Richtung "(2) $\Rightarrow$ (1)" gilt allgemein, auch wenn F und G gemeinsame Variablen haben. Die Richtung "(1) $\Rightarrow$ (2)" gilt aber i.A. *nicht*, falls F und G gemeinsame Variablen haben. Zum Beispiel gilt $A \wedge B \models (A \to B)$, aber $A \wedge B$ ist erfüllbar, und $(A \to B)$ ist keine Tautologie.

Aufgabe 2 Schaltnetze

(a) Sie arbeiten in einer Elektronik-Firma und haben für Ihre Arbeit das unten links abgebildete Schaltnetz entworfen, das aus vier Eingaben A, B, C, D eine Ausgabe F berechnet (die von C ausgehenden Kanten sind der Übersichtlichkeit halber gestrichelt). Ein Kollege sieht das Schaltnetz und findet es viel zu kompliziert. Er entwirft das unten rechts abgebildete Schaltnetz und behauptet, dass es dieselbe Aufgabe erfüllt. Hat der Kollege recht? Benutzen Sie Limboole, um herauszufinden, ob beide Schaltnetze äquivalent sind. Wenn nicht, gibt es eine Eingabe, für die beide Schaltnetze unterschiedliche Ausgaben liefern?





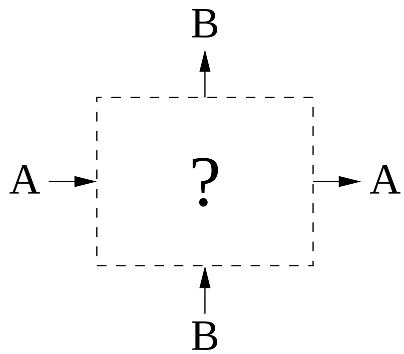
(b) Der binäre Junktor XOR (auch $\oplus$ geschrieben) ist derjenige, der als Ausgabe eine 1 liefert, wenn genau eine von beiden Eingaben 1 ist und die andere 0. Sie haben AND-, OR- und Negationsgatter zur Verfügung. Bauen Sie aus diesen ein Schaltnetz mit zwei Eingängen und einem Ausgang zusammen, wobei

i) die Ausgabe die XOR-Verknüpfung der beiden Eingaben liefert und

ii) das Schaltnetz planar ist, d.h. keine sich kreuzenden Drähte enthält.

Benutzen Sie Limboole, um die korrekte Funktionsweise ihrer Schaltung zu verifizieren.

(c) Sie haben drei XOR-Gatter und keine anderen Gatter zur Verfügung. Konstruieren Sie ein planares Schaltnetz, das untenstehende Funktion erfüllt, d.h. die beiden Eingaben kreuzen sich in der Schaltung und werden auf der anderen Seite wieder ausgegeben.



Aufgabe 2 **(Lösungsvorschlag)** *Schaltnetze*

(a) Die links abgebildete Schaltung übersetzt sich in die Formel

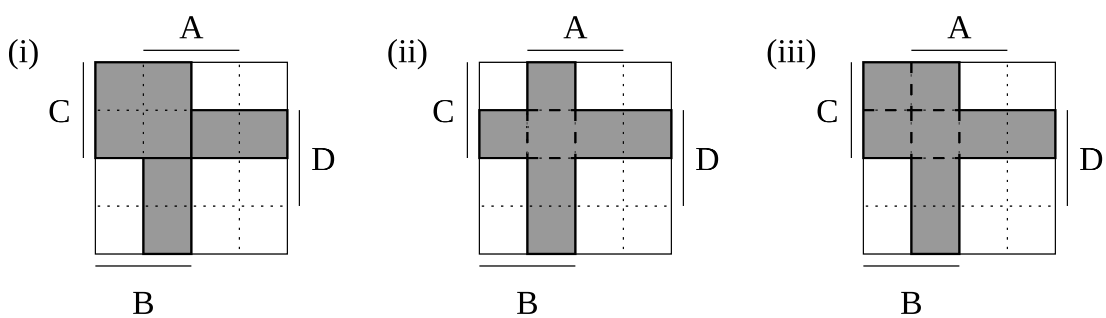
$$F_1 := (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (B \wedge C) \vee (\neg B \wedge C \wedge D).$$

Die rechts abgebildete Schaltung übersetzt sich in die Formel

$$F_2 := (A \wedge B) \vee (C \wedge D).$$

Die Frage, ob beide Schaltungen äquivalent sind, d.h. ob $F_1 \leftrightarrow F_2$ eine gültige Formel ist, wird von Limboole negativ beantwortet. Für die Belegung, die A und D eine 0, aber B und C eine 1 zuweist, liefert die linke Schaltung eine 1, die rechte aber eine 0. Die Lösung des Kollegen ist also falsch.

Vergleicht man die KV-Diagramme beider Formeln (siehe unten, (i) und (ii)), so stellt man fest, dass sie sich auch nur in dieser einen Belegung unterscheiden.



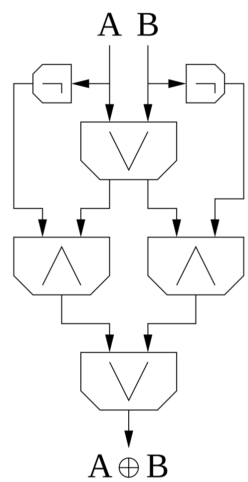
Anhand des KV-Diagramms (iii) sieht man aber auch, dass sich die Formel F_1 vereinfachen lässt, nämlich zu:

$$(A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge D)$$

mit entsprechend vereinfachtem Schaltnetz.

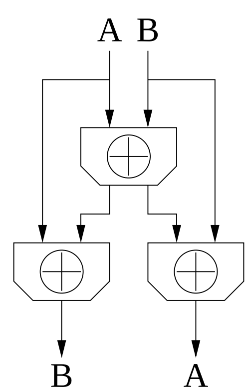
(b) Untenstehendes Schaltnetz kann mithilfe folgender Überlegung gebaut werden:

$$A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \equiv ((A \vee B) \wedge \neg A) \vee ((A \vee B) \wedge \neg B) =: F_3$$



Um die Korrektheit mit Limboole zu verifizieren, muss man den Junktor $\oplus$ ausdrücken, den es in der Limboole-Syntax nicht direkt gibt. Man kann ihn aber einfach durch $F \oplus G \equiv \neg(F \leftrightarrow G)$ umschreiben. Die Formel $F_3 \leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow B)$ wird denn auch von Limboole als gültig erkannt.

(c) Eine mögliche Lösung sieht so aus:



Von der Korrektheit kann man sich erneut durch Limboole überzeugen. Man kann sich auch überlegen, dass der $\oplus$-Junktor gerade der Addition (modulo 2) entspricht.

> Dann ergibt $A \oplus A \oplus B$ unmittelbar B (und analog für A), womit man ebenfalls die Richtigkeit bewiesen hat.
>
> Eine Konsequenz aus dieser Konstruktion ist, dass man *jedes* Schaltnetz planar machen kann, wenn man nur Negations-, Und- und Oder-Gatter zur Verfügung hat. Genauer gesagt, kann man entweder Und- oder Oder-Gatter weglassen, da man die einen durch die anderen – erneut planar – simulieren kann (einfache Anwendung von De Morgan). Man überlege sich, ob dies auch für NAND- und NOR-Gatter gilt.

Aufgabe 3 Zweistellige Junktoren

Identifiziert man einen zweistelligen Junktor mit seinem Wahrheitswerteverlauf in der Wahrheitstafel, so gibt es 16 verschiedene zweistellige Junktoren. Sie wissen bereits, dass die Junktoren NAND (nicht-und) sowie NOR (nicht-oder) eine Junktorbasis bilden. (Rufen Sie sich in Erinnerung, warum!) Zeigen Sie, dass für jeden Junktor $\circ$ außer NAND und NOR gilt: $\{\circ\}$ ist keine Junktorbasis.

Hinweis: Sie können die Beweise für mehrere dieser 14 Junktoren zusammenfassen. Überlegen Sie sich z.B., was passiert, wenn $1 \circ 1 = 1$ gilt. (Dies ist bei acht Junktoren der Fall.)

Aufgabe 3 **(Lösungsvorschlag)** *Zweistellige Junktoren*

Wir zeigen zunächst, dass jeder Junktor $\circ$, bei dem $1 \circ 1 = 1$ gilt, allein keine Junktorbasis bilden kann. Erinnern wir uns, dass eine Menge von Junktoren genau dann eine Basis ist, wenn man jeden anderen Junktor mit ihrer Hilfe ausdrücken kann. Im konkreten Fall zeigen wir, dass es unmöglich ist, die Formel $\neg F$ nur mithilfe von $\circ$ und F auszudrücken.

> Behauptung: Jede syntaktisch korrekte Formel, die aus beliebig vielen Vorkommen von $\circ$ und F besteht, ergibt 1 für die Belegung, die F eine 1 zuordnet (und ist daher nicht äquivalent zu $\neg F$).
>
> Beweis durch Induktion über die Anzahl n der Vorkommen von $\circ$.
>
> Induktionsanfang ($n = 0$): Hier ist nur die Formel F möglich, für die die Behauptung selbstverständlich gilt.
>
> Induktionsschritt: Sei $G_1 \circ G_2$ eine Formel mit $n+1$ Vorkommen von $\circ$. Dann sind G_1 und G_2 Formeln, in denen es zusammen n Vorkommen von $\circ$ gibt. Unter der Annahme, dass die Induktionsbehauptung bereits für alle Zahlen von 0 bis n gilt, liefern G_1 und G_2 beide eine 1, falls F mit 1 belegt ist. Dann aber liefert auch $G_1 \circ G_2$ eine 1.

Ergänzung: Man kann den Beweis auch so erweitern, dass er für Formeln mit F, $\circ$ und *beliebigen zusätzlichen* Variablen funktioniert. Als Behauptung stellt man auf, dass diese

Formeln 1 ergeben für diejenige Belegung, die allen Variablen 1 zuweist (woraus wiederum folgt, dass sie auf dieser Belegung nicht mit $\neg F$ übereinstimmen, also nicht mit $\neg F$ äquivalent sind). Im Beweis muss man dann nur den Induktionsanfang leicht abändern, jede Variable ist als Formel möglich, ergibt aber unter der genannten Belegung 1.

Analog kann man zeigen, dass kein Junktor mit $0 \circ 0 = 0$ die Negation ausdrücken kann. Damit hat man schon 12 der 14 Junktoren "erledigt".

Es verbleiben die zwei Junktoren mit der folgenden Wahrheitstabelle:

F	G	$\circ_1$	$\circ_2$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

Man sieht leicht, dass $F \circ_1 G \equiv \neg F$ und $F \circ_2 G \equiv \neg G$ ist. Ebenso leicht (ggfs. erneut mit Induktion) überzeugt man sich, dass man mit $\circ_1$ und $\circ_2$ alleine nur die Formeln F, G, $\neg F$, $\neg G$ ausdrücken kann, aber keine anderen, z.B. $F \vee G$ oder $F \wedge G$.

Aufgabe 4 Endlichkeitssatz

Sei M eine unendliche Formelmenge und F eine Formel. Zeigen Sie mithilfe des Endlichkeitssatzes, dass dann folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

(1) $M \models F$

(2) Es gibt eine endliche Teilmenge $N \subset M$, für die $N \models F$ gilt.

Aufgabe 4 (Lösungsvorschlag) *Endlichkeitssatz*

Zum Beweis wird mehrmals die Tatsache ausgenutzt, dass für jede Menge M' und jede Formel G gilt: $M' \models G$ gdw. $M' \cup \{\neg G\}$ unerfüllbar ist. Dies folgt aus dem Satz auf der letzten Folie des Abschnitts "Grundlagen".

"(1) $\Longrightarrow$ (2)":

$$\begin{aligned} M \models F \ &\Longleftrightarrow M \cup \{\neg F\} \text{ ist unerfüllbar} \\ &\Longrightarrow \text{Es gibt eine endliche unerfüllbare Teilmenge } N' \subset M \cup \{\neg F\} \\ &\qquad\qquad \text{(Hier wurde der Endlichkeitssatz verwendet.)} \\ &\Longrightarrow \text{Für } N := N' \setminus \{\neg F\} \text{ gilt: } N \cup \{\neg F\} \text{ ist unerfüllbar} \\ &\Longrightarrow N \models F \end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt kann mithilfe einer Fallunterscheidung erklärt werden: Entweder enthält N' die Formel $\neg F$, dann ist $N \cup \{\neg F\} = N'$, oder N' enthält $\neg F$ nicht, dann ist $N \cup \{\neg F\} \supset N'$. In jedem Fall ist $N \cup \{\neg F\} \supseteq N'$, und wenn N' unerfüllbar ist, gilt das natürlich ebenso für jede Obermenge von N'.

"(2) $\Longrightarrow$ (1)":

$$\begin{aligned} N \models F \quad &\Longleftrightarrow N \cup \{\neg F\} \text{ ist unerfüllbar} \\ &\Longrightarrow M \cup \{\neg F\} \text{ ist unerfüllbar} \\ &\Longleftrightarrow M \models F \end{aligned}$$

Ergänzung: In Umkehrung kann man obige Äquivalenz auch verwenden, um den Endlichkeitssatz zu beweisen. Damit das Sinn ergibt, sollte man die Äquivalenz freilich ohne Verwendung des Endlichkeitssatzes bewiesen haben...

Zur Erinnerung: Der Endlichkeitssatz besagt, dass eine Menge M von Formeln genau dann erfüllbar ist, wenn jede endliche Teilmenge von M erfüllbar ist. Eigentlich redet der Satz von allgemeinen Mengen M, aber für endliche M ist er trivial. Nehmen wir also an, dass M *unendlich* ist.

Die "Hin"-Richtung (wenn M erfüllbar, dann auch jede Teilmenge) ist offensichtlich. Für die andere Richtung (wenn jede Teilmenge erfüllbar, dann auch M) benutzen wir Kontraposition. Nehmen wir also an, dass obige Äquivalenz gilt, und dass M unerfüllbar ist. Sei F irgendeine der Formeln in M, und sei $M' := M \setminus \{F\}$. Dann gilt $M' \models \neg F$, und wegen obiger Äquivalenz gibt es eine unerfüllbare endliche Menge $N \subset M'$ mit $N \models \neg F$, d.h., die endliche Teilmenge $N \cup \{F\}$ ist unerfüllbar.