

Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 2. November, um 12 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 Folgerung und Äquivalenz

Untenstehend sehen Sie drei Paare von Formeln F_1, F_2 . Überlegen Sie jeweils, ob $F_1 \models F_2$, $F_2 \models F_1$ oder beides gilt.

(a) $F_1 = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$
 $F_2 = A \rightarrow C$

(b) $F_1 = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \neg A)$
 $F_2 = A \vee \neg A$

(c) $F_1 = (A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee \neg D)$
 $F_2 = (A \wedge \neg B) \vee (D \rightarrow C)$

Begründen Sie Ihre Antworten mit den Mitteln der Aussagenlogik, z.B. mit Wahrheitstafeln, den in der Vorlesung vorgestellten Äquivalenzgesetzen oder dem Ersetzbarkeitstheorem.

Aufgabe 2 Modellierung von Sudoku

Inspiziert durch seine Vorlesung versucht Herr Esparza, Sudoku-Puzzles mit Hilfe der Aussagenlogik zu lösen. Leider muss er viel Zeit damit verbringen, die Folien vorzubereiten und dann auch noch einen Beamer für die Vorlesung aufzutreiben, so dass er nicht so recht vorankommt.

Er überlegt sich aber noch, dass er Variablen der Form $v_{x,y,z}$ benutzen kann, um auszudrücken, dass das Feld in Zeile x und Spalte y die Zahl z enthält, und dass die folgende Formel F dann bedeutet, dass die erste Zeile alle Zahlen von 1 bis 9 enthält (in einem üblichen Sudoku-Feld der Größe 9x9):

$$F = \bigwedge_{z=1}^9 \left(\bigvee_{y=1}^9 v_{1,y,z} \right)$$

- (a) Helfen Sie Herrn Esparza, indem Sie seine Formel F zu einer Formel F' vervollständigen, die *alle* regelkonform ausgefüllten Sudoku-Puzzles der Größe 9x9 beschreibt. Benutzen Sie Variablen der Form $v_{x,y,z}$ mit der Bedeutung wie oben.

- (b) Herr Esparza hat unter <http://www.forbeginners.info/sudoku-puzzles/> eine Sudoku-Webseite entdeckt und sich das unten abgebildete Puzzle heruntergeladen, das dort als “extrem schwer” bezeichnet wird. Er stellt fest, dass es tatsächlich zu schwer für ihn ist und will es deshalb mit Hilfe seines Computers lösen. Dazu überlegt er sich, dass die Lösung eindeutig durch eine erfüllende Belegung der Formel $F' \wedge G$ charakterisiert wird, wobei F' die Formel aus (a) ist und $G = v_{1,1,6} \wedge v_{1,8,4} \wedge v_{2,3,5} \wedge \dots$ die vorgelegten Felder beschreibt. Ein SAT-Solver, d.h. ein Programm, welches das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln der Aussagenlogik löst, kann dann auf $F' \wedge G$ angesetzt werden, um eine solche Belegung zu finden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	6							4	
2			5			2			7
3	7	2	9						3
4		9			4				1
5					6				
6	4				8			7	
7	3						1	6	5
8	2			4			8		
9		5							4

Auf der Vorlesungs-Webseite finden Sie unter dem Stichpunkt “Übungen” ein Programm, das ein Sudoku-Puzzle einliest, daraus eine Formel generiert und dann mit Hilfe des SAT-Solvers Limboole eine Lösung findet. Leider generiert das Programm bislang nur die Formel $F \wedge G$. Verbessern Sie es so, dass es die Formel $F' \wedge G$ erzeugt, und wenden Sie es auf das unten dargestellte Sudoku-Puzzle an. (Weitere Einzelheiten sind auf der o.g. Webseite erläutert.)

- (c) Überlegen Sie sich, wie man einen SAT-Solver einsetzen könnte, um Minesweeper zu lösen. Welche Probleme treten auf, und wie kann man sie umgehen?

Aufgabe 3 *Formelmengen*

- (a) Geben Sie aussagenlogische Formeln F_1, F_2, F_3 mit folgenden Eigenschaften an:

- (i) Die Menge $\{F_1, F_2, F_3\}$ ist unerfüllbar.
- (ii) Die Mengen $\{F_1, F_2\}, \{F_1, F_3\}, \{F_2, F_3\}$ sind alle erfüllbar.

Geben Sie für die zwei-elementigen Mengen Modelle an.

- (b) Sei $n \geq 3$ beliebig. Geben Sie eine Formelmenge $M_n = \{F_1, \dots, F_n\}$ mit folgenden Eigenschaften an:

- (i) M_n ist unerfüllbar.
- (ii) Alle $(n - 1)$ -elementigen Teilmengen von M_n sind erfüllbar.

Begründen Sie kurz, warum die von Ihnen gewählte Menge M_n die Eigenschaften (i) und (ii) hat.

- (c) Sei $n \geq 3$ beliebig und M_n eine Formelmenge wie in (b). Es sei v_n die Anzahl unterschiedlicher Variablen, die in M_n vorkommt. Wie groß muss v_n *mindestens* sein, damit Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt sind?