Technische Universität München
Informatik / Lehrstuhl 7
Esparza/Schwoon

WS 2007/08
Übungsblatt 1
19. Oktober 2007

Übung zu Logik

Bearbeiten Sie diese Aufgaben bis zur nächsten Übung am Freitag, 26. Oktober, um 12 Uhr. Die Lösungen werden in der Übung besprochen.

Aufgabe 1 Syllogismen

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit *Syllogismen*, die von Aristoteles eingeführt wurden. Welche der folgenden Syllogismen sind gültig? Begründen Sie Ihre Antwort oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Einige M sind nicht P, alle M sind S, dann gilt: einige S sind nicht P.

(b) Kein P ist M, kein M ist S, dann gilt: einige S sind nicht P.

(c) Alle M sind P, kein S ist M, dann gilt: kein S ist P.

(d) Alle P sind M, kein S ist M, dann gilt: kein S ist P.

Argumentieren Sie mit Mengen und benutzen Sie folgende Formalisierungen:

1. "Alle X sind Y" bedeutet $X \subseteq Y$.
2. "Kein X ist Y" bedeutet $X \cap Y = \emptyset$.
3. "Einige X sind Y" bedeutet $X \cap Y \neq \emptyset$.
4. "Einige X sind nicht Y" bedeutet $X \setminus Y \neq \emptyset$.

Sie können auch hier mit Syllogismen experimentieren:
`http://www.begriffslogik.de/online/aristo/index.html`

Aufgabe 1 **(Lösungsvorschlag)** *Syllogismen*

(a) Gültig. Einige M sind nicht P, d.h., $M \setminus P \neq \emptyset$, d.h., es gibt wenigstens ein Element x mit $x \in M$ und $x \notin P$. Alle M sind S, d.h., $M \subseteq S$, d.h., $x \in S$. Dann gilt auch $x \in S \setminus P$, also sind einige S nicht P.

Dieser Syllogismus hat übrigens die Bezeichnung *Bocardo*.

(b) Ungültig. Gegenbeispiel: $P = S = \{1\}$, $M = \{2\}$.
Noch einfacher: $M = P = S = \emptyset$.

(c) Ungültig. Gegenbeispiel: $M = \{1\}$, $S = \{2, 3\}$, $P = \{1, 2\}$.
Noch einfacher: $M = \emptyset$, $P = S = \{1\}$.

(d) Gültig. Alle P sind M, also $P \subseteq M$. Kein S ist M, also $S \cap M = \emptyset$. Wir machen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass "Kein S ist P" *nicht* gilt, sei also ein $x \in S \cap P$. Wegen $P \subseteq M$ ist gilt auch $x \in S \cap M$. Das widerspricht aber $S \cap M = \emptyset$. Also war die Annahme falsch und "Kein S ist M" gilt.

Bezeichnung: *Camestres*.

Später werden wir eine Möglichkeit kennenlernen, wie man Beweise wie in (a) und (d) systematisch führen kann.
Eine Möglichkeit zum Auffinden möglichst einfacher Lösungen ist es, sich die Aussagen mit Hilfe von Venn-Diagrammen (sich überlappenden Kreisen) zu veranschaulichen.

Aufgabe 2 Sudoku

(a) Wir betrachten erneut Sudoku, diesmal mit 4x4 Quadraten. In jeder Spalte, jeder Zeile und in jedem der vier 2x2-Quadrate müssen alle Ziffern von 1 bis 4 *genau einmal* auftreten.

Unten sind drei Sudokus dieser Art gegeben. Füllen Sie die Quadrate so weit wie möglich aus. Gibt es eine Lösung? Ist die Lösung eindeutig? Nach welchen Regeln sind Sie beim Ausfüllen der Quadrate vorgegangen?

	A	B	C	D
4	1			
3				
2		2	3	
1			2	

	A	B	C	D
4	1			
3	2			
2			2	1
1				

	A	B	C	D
4			3	
3		2		
2	1			
1				

(b) Das Computer-Spiel Minesweeper ist als Beigabe zu vielen Betriebssystemen bekannt. Das Spielfeld ist in Quadrate unterteilt, und auf manchen dieser Quadrate liegen Minen versteckt. Der Spieler muss alle Felder aufdecken, die frei von Minen sind; deckt er ein Feld auf, das eine Mine enthält, so hat er verloren. Wird ein Feld ohne Mine aufgedeckt, so bekommt man die Zahl der Minen zu sehen, die auf den acht Nachbarfeldern (links, rechts, oben, unten und diagonal) enthalten sind.

Unten sehen Sie den aktuellen Spielstand eines Minesweeper-Feldes. Von den mit $*$ markierten Felder ist bereits bekannt, dass sie eine Mine enthalten. Bereits aufgedeckte Felder enthalten die Zahl der Minen auf den Nachbarfeldern. Leere Felder sind noch nicht aufgedeckt worden.

6						*			1
5						*			2
4	1	1	1	1	3	*	3	3	*
3	0	0	0	0	1	2	2	3	
2	1	2	2	1	2	3	*	4	
1							*	3	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I

Finden Sie all die leeren Felder, bei denen Sie mittels logischer Schlussfolgerungen sicher sein können, dass sie eine Mine enthalten bzw. keine Mine enthalten. Können Sie diese Bestimmung bei allen Feldern vornehmen? Gibt es Fälle, in denen keine Lösung möglich ist? Nach welchen Regeln sind Sie jeweils vorgegangen?

(c) Überlegen Sie sich, worin die Gemeinsamkeiten beim Lösen von Sudoku- und Minesweeper-Puzzles bestehen.

Aufgabe 2 **(Lösungsvorschlag)** *Sudoku*

(a) Das erste Sudoku hat eine eindeutige Lösung. Im Feld A2 muss z.B. eine 4 stehen, weil alle anderen Zahlen schon in derselben Zeile oder Spalte vorkommen. Im Feld B1 muss eine 1 stehen, weil es irgendwo im linken unteren Viertel vorkommen muss und innerhalb dieses Viertels nur noch das Feld B1 dafür in Frage kommt. Diese beiden Argumentationsmuster sind diejenigen, die man beim Lösen von Sudokus am häufigsten braucht. Auf der Webseite `http://angusj.com/sudoku/hints.php` werden sie als "Singles" und "Hidden Singles" bezeichnet. Auch die übrigen Felder im ersten Puzzle lassen sich mit Hilfe dieser Argumentationsmuster ausfüllen.

4	1	3	4	2
3	2	4	1	3
2	4	2	3	1
1	3	1	2	4
	A	B	C	D

4	1			2
3	2		1	
2			2	1
1		1/2		
	A	B	C	D

4	4	1	3	2
3	3	2	1/4	4/1
2	1	4/3	2	3/4
1	2	3/4	4/1	1/3
	A	B	C	D

Das zweite Sudoku-Puzzle hat keine Lösung. Zwar lassen sich Felder C3 und D4 mit Hilfe der "Hidden-Single"-Argumentation eindeutig ausfüllen, nach derselben Argumentation müssen sich aber sowohl die 1 als auch die 2 im Feld B1 befinden, was natürlich nicht geht.

Das dritte Sudoku-Puzzle hat mehr als eine Lösung. Neben den bestehenden Feldern lassen sich sechs weitere mit den bekannten Techniken eindeutig bestimmen. Für die übrigen sieben gibt es jedoch mehr als eine Lösung. Zwei dieser Lösungen sind obenstehend angedeutet.

(b) Oben links lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen:

- Wegen A4 muss entweder A5 oder B5 eine Mine enthalten.
- Folglich darf wegen B4 das Feld C5 keine Mine enthalten.
- Wegen E4 muss entweder D5 oder E5 eine Mine enthalten.
- Da C5 keine Mine enthält, muss wegen C4 entweder B5 oder D5 eine Mine enthalten.
- Zusammenfassung: Von A5 bis E5 gibt es genau zwei Minen, die entweder auf A5 und D5 oder B5 und E5 liegen. C5 ist auf jeden Fall frei.

Unten rechts gibt eine eindeutige Lösung:

- Wegen H2 müssen in I1, I2 und I3 genau zwei Minen versteckt sein.
- Wegen H1 und H3 können diese aber nicht in den Kombinationen I1 und I2 oder I2 und I3 vorliegen.
- Es verbleibt die Möglichkeit I1 und I3, I2 ist demnach frei.

Oben rechts gibt es keine eindeutige Lösung:

- Wegen der Mine auf I3 und wegen G4 und H4 muss entweder in G5 oder in H5 eine Mine liegen.
- Wegen I5 und I6 muss entwder in H5 oder in H6 eine Mine liegen.
- Es liegt also entwder in G5 und H6 eine Mine (und in H5 nicht), oder es liegt in H5 eine Mine (und in G5 und H6 nicht). Daher lässt sich über keines der drei Felder eine sichere Aussage machen.

Unten links gibt es gar keine Lösung:

- Für die Felder D1, E1 und F1 ist nur folgendes möglich: D1 und F1 haben eine Mine, E1 ist frei.
- Dann muss aber wegen D2 auch C1 frei von Minen sein.
- Dann muss wegen C2 wiederum eine Mine in B1 versteckt sein.
- Wegen B2 muss dann auch in A1 eine Mine sein, wegen A2 darf dort aber keine sein. Widerspruch.

(c) In beiden Spielen geht es darum, den Inhalt von Feldern zu bestimmen. Dazu haben wir zwei Informationen zur Verfügung: erstens die Regeln, die quasi die Menge aller gültig ausgefüllten Spielfelder festlegen – unsere Aufgabe ist es quasi, ein Spielfeld aus dieser Menge auszuwählen. Zweitens die vorab ausgefüllten Felder, die die zur Wahl stehende Menge weiter einschränkt. Alternativ kann man auch sagen, dass wir eine korrekte *Belegung* für das gesamte Spielfeld finden müssen.

Da es im Allgemeinen zu schwierig ist, das gesamte Feld auf einmal zu bestimmen, und der Ansatz "Raten und Verwerfen" zu zeitaufwändig ist, geht man i.A. so vor, dass man nach und nach den Inhalt einzelner Felder bestimmt. Dazu bedient man sich meistens bestimmter Argumentationsmuster, z.B. "singles" oder "hidden singles" bei Sudoku. Letztlich sind alle diese Muster aber nur Spezialfälle einer allgemeineren Regel: Wir überprüfen für ein gegebenes Feld, ob dieses *in allen möglichen Belegungen* des gesamten Spielfelds *denselben Inhalt* haben muss.

Dabei gibt es drei Möglichkeiten:

- Wir finden heraus, dass das Feld tatsächlich in allen möglichen Spielfeld-Belegungen denselben Inhalt hat. Dann haben wir den Inhalt dieses Feldes eindeutig bestimmt. Für eine solche Bestimmung ist i.d.R. nicht notwendig, tatsächlich alle möglichen Spielfeld-Belegungen zu bestimmen, meistens geht dies mit Hilfe "lokaler" Argumentationsketten.
- Wir stellen fest, dass es mindestens zwei mögliche Spielfeld-Belegungen gibt, in denen das Feld verschiedene Inhalte hat. Dann können wir noch keine Aussage über dieses Feld treffen. Meistens werden wir dann versuchen, mit einem anderen Feld weiter zu machen, bei dem wir mehr Glück haben. Wenn es für alle noch offenen Felder mehr als einen möglichen Inhalt gibt, dann gibt es keine eindeutige Lösung.
- Wir stellen fest, dass es keine Belegung gibt, in der dem Feld ein Inhalt zugeordnet wird, ohne dass dabei irgendeine Regel verletzt wird. In diesem Falle gibt es keine Lösung. (I.d.R. haben wir dann schon zuvor irgendeinen Fehler gemacht.)

Aus der Tatsache, dass wir eine "Belegung" suchen, klingt schon heraus, dass Sudoku und Minesweeper etwas mit Aussagenlogik zu tun haben. Darauf werden wir im nächsten Übungsblatt genauer eingehen.

Es gibt auch – jenseits der Optik und der konkreten Regeln – ein paar wichtige Unterschiede zwischen den beiden Spielen:

- In Sudoku sind alle zum Lösen des Puzzles notwendigen Informationen von Anfang an da. Das Ausfüllen eines Feldes bringt uns keine neue Information, die nicht (implizit) schon vorher da gewesen wäre. Das Ausfüllen dient quasi nur als Gedächtnisstütze. Bei Minesweeper verhält es sich so ähnlich, wenn wir ein Feld markieren, das notwendigerweise eine Mine enthält – auch dies liefert keine Information, die nicht schon vorher (implizit) da war. Das Öffnen eines minen-freien Feldes liefert jedoch tatsächlich neue Information, die man zum weiteren Vorgehen oft zwingend braucht, nämlich die Anzahl der Nachbarminen dieses Feldes.

- Falls es keine eindeutige Lösung gibt, ist dies in Sudoku kein Problem. Jede mögliche Lösung wird als korrekt angesehen. In Minesweeper wird hingegen nur eine einzige mögliche Lösung als korrekt angesehen. Entscheidet man sich bei Zweideutigkeit für die falsche, hat man verloren.

Aufgabe 3 Natürliche Sprache

(a) Betrachten Sie die folgenden drei Paare von Aussagen und vergleichen Sie den Gebrauch von logischen Begriffen wie "oder", "wenn", "alle" usf. Gibt es semantische Zweideutigkeiten?

i) "Wenn es regnet, ist die Straße nass."
"Wenn man ein Verbrechen begeht, muss man ins Gefängnis."

ii) "Möchten Sie Tee oder Kaffee?"
"Beim Fußball ist man nicht im Abseits, wenn man im Moment der Ballabgabe zwei gegnerische Spieler vor sich hat oder in der eigenen Hälfte steht."

iii) "Wenn alle an einem Strang ziehen, schaffen wir das Projekt."
"Wenn alle sich einen Karton nehmen, haben wir den Umzug schnell geschafft."

(b) Überlegen Sie sich, welche der folgenden Aussagen gleichbedeutend sind.

i) "Wenn alle mitmachen, schaffen wir es."

ii) "Wenn nicht alle mitmachen, dann schaffen wir es nicht."

iii) "Wenn wir es nicht schaffen, hat jemand nicht mitgemacht."

iv) "Wir machen jetzt alle mit, und dann schaffen wir es auch."

Aufgabe 3 **(Lösungsvorschlag)** *Natürliche Sprache*

(a) i) Bei der ersten Aussage (Regen, dann Straße nass) ist wohl eher eine einseitige Implikation gemeint. Wenn die Straße nass ist, muss es nicht unbedingt regnen, jemand könnte auch Wasser auf die Straße geschüttet haben.

Bei der zweiten Aussage (Verbrechen, Gefängnis) meint man normalerweise eine Genau-dann-wenn-Beziehung. Verbrecher, und auch nur Verbrecher, gehören ins Gefängnis.

ii) Bei "Tee oder Kaffee" wird man im Allgemeinen ein Exklusiv-Oder meinen, beides zusammen schmeckt nicht. Beim Fußball ist ein Inklusiv-Oder gemeint, man ist selbstverständlich auch dann nicht im Abseits, wenn man beide Bedingungen (zwei Spieler und eigene Hälfte) erfüllt.

iii) In "Wenn alle an einem Strang ziehen" denkt man daran, dass alle am selben Strang ziehen. (Es gibt einen Strang, so dass für alle gilt, dass sie daran ziehen.) Mit "Wenn alle sich einen Karton nehmen" wird man hingegen nicht sagen wollen, dass alle sich denselben Karton nehmen, sondern jeder einen anderen. (Für alle gilt, dass es einen Karton gibt, den man sich nimmt.)

(b) Gleichbedeutend sind Aussagen (i) und (iii). Allgemein gilt, dass "$a \to b$" äquivalent zu "$\neg b \to \neg a$" ist. Aussage (ii) entspricht mehr der Formel "$\neg a \to \neg b$", sie sagt insbesondere nichts darüber aus, ob das Mitmachen aller auch zum Erfolg führt. Aussage (iv) entspricht formal eher "$a \wedge b$". Umgangssprachlich kann man es freilich auch im selben Sinne wie (i) und (iii) verstehen; Umgangssprache hat nunmal nicht immer eine eindeutige Semantik.