

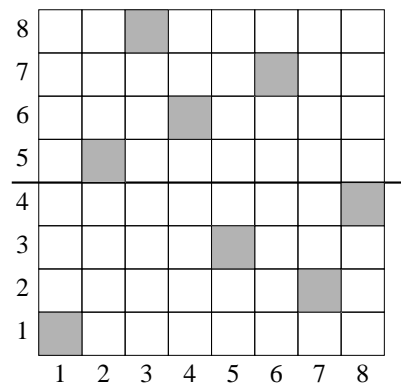
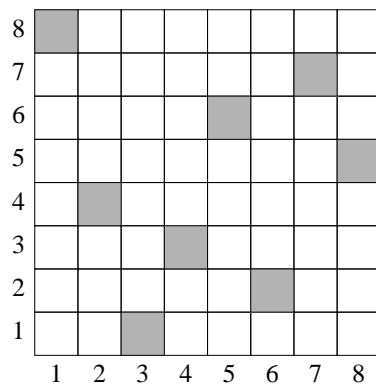
Klausur zur Vorlesung Logik

Es gibt maximal 40 Punkte. Die Klausur ist mit 17 Punkten bestanden. Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 1 Damen-Problem

(5+2 Punkte)

Die Dame ist eine Schachfigur, die beliebig lange Züge in horizontaler, vertikaler und diagonaler Richtung machen kann. Das *Acht-Damen-Problem* besteht darin, auf einem normalen Schachbrett mit 8×8 Feldern acht Damen so aufzustellen, dass keine Dame eine andere schlagen kann. Unten sehen Sie zwei mögliche Lösungen.



(a) Erstellen Sie aussagenlogische Formeln, die folgende Sachverhalte ausdrücken:

- i) $F_1 \hat{=}$ "in jeder Reihe steht mindestens eine Dame"
- ii) $F_2 \hat{=}$ "in jeder Reihe steht höchstens eine Dame"
- iii) $F_3 \hat{=}$ "in jeder Spalte steht höchstens eine Dame"
- iv) $F_4 \hat{=}$ "in jeder 'Nordwest-Diagonale' (von links oben nach rechts unten) steht höchstens eine Dame"
- v) $F_5 \hat{=}$ "in jeder 'Nordost-Diagonale' (von links unten nach rechts oben) steht höchstens eine Dame"

Verwenden Sie Variablen x_{ij} , $1 \leq i, j \leq 8$, um auszudrücken, dass in Reihe i und Spalte j eine Dame steht. Die Formel $F := F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4 \wedge F_5$ beschreibt dann sämtliche Lösungen des Acht-Damen-Problems in dem Sinn, dass eine Belegung genau dann Modell von F ist, wenn die auf 1 gesetzten Variablen eine Lösung darstellen.

Hinweis: Zwei Felder (i, j) und (i', j') gehören zur selben Nordwest-Diagonale genau dann, wenn $i + j = i' + j'$ ist, und zur selben Nordost-Diagonale genau dann, wenn $i - j = i' - j'$ ist.

- (b) Die beiden oben dargestellten Spielfelder sind *horizontal achsensymmetrisch* zueinander, d.h. spiegelt man das eine Spielfeld entlang einer Achse, die horizontal durch die Mitte des Spielfelds läuft (wie oben rechts angedeutet), so erhält man das andere Spielfeld. Man sieht leicht, dass ein Spielfeld genau dann eine Lösung des Acht-Damen-Problems ist, wenn das gespiegelte Spielfeld eine Lösung ist.

Beschreiben Sie, wie man die obige Formel F verändern muss, damit von jeweils zwei Lösungen, die man durch horizontale Spiegelung erhält, *genau eine* Modell von F ist.

Aufgabe 2 BDDs (2+2+3 Punkte)

- (a) Der dreistellige Junktor *ite* (if-then-else) ist wie folgt definiert:

$$ite(F, G, H) \equiv (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge H)$$

Finden Sie eine Formel, die äquivalent ist zu $F \rightarrow G$ und nur F, G, ite und evtl. die Konstanten 0 oder 1 enthält, ggfs. mehrmals.

- (b) Sei $v < w < x < y < z$. Erstellen Sie BDDs für die Formeln

$$F_1 = (\neg z) \rightarrow (v \wedge w) \quad \text{und} \quad F_2 = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow x).$$

- (c) Erstellen Sie einen BDD für die Formel $F = F_1 \vee F_2$.
Wie viele erfüllende, in v, w, x, y, z unterschiedliche Belegungen hat F ?

Aufgabe 3 DPLL-Verfahren (3+2 Punkte)

- (a) Wenden Sie das DPLL-Verfahren auf die untenstehende Formel F an, d.h. geben Sie eine maximale Herleitung aus F an. Ist F erfüllbar? Wenn ja, geben Sie eine erfüllende Belegung an.

$$F = \{ \{ \neg A, D \}, \{ A, \neg B \}, \{ \neg A, \neg D, \neg B \}, \{ B, C \}, \{ \neg A, B, \neg C, \neg D \}, \{ A, D \} \}$$

- (b) Die Subsumption-Regel ist wie folgt:

Wenn eine Formel F zwei Klauseln K, K' enthält mit $K \subseteq K'$, dann streiche K' aus F .

Finden Sie eine Formel F mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Herleitung aus F , in der die Subsumption-Regel benutzt wird, aber keine Herleitung, in der sie im ersten Schritt benutzt wird.

Aufgabe 4 Unerfüllbarkeit

(4+4 Punkte)

Sei F eine aussagenlogische Formel, die eine Variable A enthält, und sei $G := F[A/0] \wedge F[A/1]$, wobei $F[A/b]$ mit $b = 0, 1$ die Formel beschreibt, die entsteht, wenn alle Vorkommen von A in F durch b ersetzt werden.

- (a) Beweisen Sie: $G \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.
- (b) Sei H eine weitere Formel, die die Variable A *nicht* enthält, so dass $H \wedge \neg F$ unerfüllbar ist. Beweisen Sie, dass dann auch $H \wedge \neg G$ unerfüllbar ist.

Hinweise: Zeigen Sie in (a), dass für jede Belegung \mathcal{A} gilt $\mathcal{A}(G \wedge \neg F) = 0$, indem Sie die Fälle $\mathcal{A}(A) = 0$ und $\mathcal{A}(A) = 1$ unterscheiden. In (b) können Sie (ohne Beweis) verwenden, dass für jede Formel F' gilt: F' ist unerfüllbar genau dann, wenn $F'[A/0]$ und $F'[A/1]$ beide unerfüllbar sind.

Aufgabe 5 Prädikatenlogik

(2+4 Punkte)

- (a) Gegeben seien folgende prädikatenlogische Formeln:

- i) $F_1 = \forall x(P(x) \vee R(x)) \rightarrow (\forall xP(x) \wedge \forall xR(x))$
 ii) $F_2 = \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow \exists y(Q(y) \rightarrow P(y))$

Geben Sie für beide Formeln jeweils (falls möglich) eine Struktur an, die die Formel erfüllt, und eine, die die Formel nicht erfüllt.

- (b) Sei $F = \exists x(P(x) \rightarrow \forall yP(y))$. Führen Sie folgende Schritte auf F durch:
- i) Geben Sie eine Skolem-Normalform G von $\neg F$ (d.h. der *Negation* von F !) an, die keine Funktionssymbole (außer Konstanten) enthält.
- ii) Geben Sie alle Herbrand-Strukturen von G an.
- iii) Werten Sie G in allen Herbrand-Strukturen aus. Was folgt aus dieser Auswertung für F , d.h., ist F gültig, erfüllbar oder unerfüllbar?

Aufgabe 6 Resolution

(2+3+2 Punkte)

Vor einem Länderspiel erklärt Jogi Löw der Presse die Taktik und die Stimmung in seiner Mannschaft:

- Jeder Stürmer wird eingesetzt.
- Alle eingesetzten Spieler haben nichts gegeneinander.
- Jeder Spieler hat etwas gegen irgendeinen anderen Spieler.

Ein Journalist folgert, dass jeder Stürmer etwas gegen irgendeinen Nicht-Stürmer hat. Stimmt dies?

- (a) Formalisieren Sie die Aussagen von Jogi Löw als eine prädikatenlogische Formel F und die des Journalisten als eine Formel J . Verwenden Sie folgende Prädikate: $S(x)$ bedeutet, dass x ein Stürmer ist; $E(x)$ bedeutet, dass x eingesetzt wird; $G(x, y)$ bedeutet, dass x etwas gegen y hat.
- (b) Formen Sie die Formel $F \wedge \neg J$ in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolem-Normalform um. Geben Sie bei jedem Umformungsschritt an, ob er zu einer äquivalenten oder nur erfüllbarkeitsäquivalenten Formel führt.
- (c) Sei H das Ergebnis der Umformung aus (b). Führen Sie das prädikatenlogische Resolutionsverfahren für H durch, und versuchen Sie, die leere Klausel herzuleiten. Bedeutet die Herleitung der leeren Klausel, dass der Journalist recht hat, oder dass er im Unrecht ist?