Technische Universität München
Informatik / Lehrstuhl 7
Esparza/Schwoon

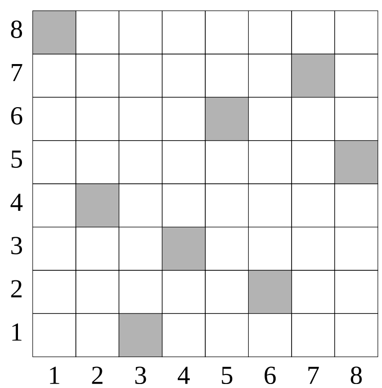
WS 2007/08
8. Februar 2008

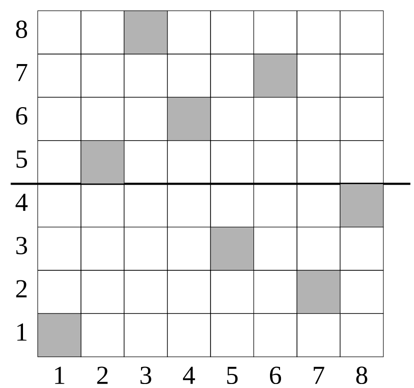
Klausur zur Vorlesung Logik

Es gibt maximal 40 Punkte. Die Klausur ist mit 17 Punkten bestanden. Begründen Sie Ihre Antworten!

Aufgabe 1 Damen-Problem (5+2 Punkte)

Die Dame ist eine Schachfigur, die beliebig lange Züge in horizontaler, vertikaler und diagonaler Richtung machen kann. Das *Acht-Damen-Problem* besteht darin, auf einem normalen Schachbrett mit 8×8 Feldern acht Damen so aufzustellen, dass keine Dame eine andere schlagen kann. Unten sehen Sie zwei mögliche Lösungen.





(a) Erstellen Sie aussagenlogische Formeln, die folgende Sachverhalte ausdrücken:

i) $F_1 \mathrel{\widehat{=}}$ "in jeder Reihe steht mindestens eine Dame"

ii) $F_2 \mathrel{\widehat{=}}$ "in jeder Reihe steht höchstens eine Dame"

iii) $F_3 \mathrel{\widehat{=}}$ "in jeder Spalte steht höchstens eine Dame"

iv) $F_4 \mathrel{\widehat{=}}$ "in jeder 'Nordwest-Diagonale' (von links oben nach rechts unten) steht höchstens eine Dame"

v) $F_5 \mathrel{\widehat{=}}$ "in jeder 'Nordost-Diagonale' (von links unten nach rechts oben) steht höchstens eine Dame"

Verwenden Sie Variablen x_{ij}, $1 \leq i, j \leq 8$, um auszudrücken, dass in Reihe i und Spalte j eine Dame steht. Die Formel $F := F_1 \land F_2 \land F_3 \land F_4 \land F_5$ beschreibt dann sämtliche Lösungen des Acht-Damen-Problems in dem Sinn, dass eine Belegung genau dann Modell von F ist, wenn die auf 1 gesetzten Variablen eine Lösung darstellen.

Hinweis: Zwei Felder (i, j) und (i', j') gehören zur selben Nordwest-Diagonale genau dann, wenn $i+j = i'+j'$ ist, und zur selben Nordost-Diagonale genau dann, wenn $i-j = i'-j'$ ist.

(b) Die beiden oben dargestellten Spielfelder sind *horizontal achsensymmetrisch* zueinander, d.h. spiegelt man das eine Spielfeld entlang einer Achse, die horizontal durch die Mitte des Spielfelds läuft (wie oben rechts angedeutet), so erhält man das andere Spielfeld. Man sieht leicht, dass ein Spielfeld genau dann eine Lösung des Acht-Damen-Problems ist, wenn das gespiegelte Spielfeld eine Lösung ist.

Beschreiben Sie, wie man die obige Formel F verändern muss, damit von jeweils zwei Lösungen, die man durch horizontale Spiegelung erhält, *genau eine* Modell von F ist.

Aufgabe 1 **(Lösungsvorschlag)** *Damen-Problem*

(a)
$$F_1 = \bigwedge_{i=1}^{8} \bigvee_{j=1}^{8} x_{ij}$$

$$F_2 = \bigwedge_{i=1}^{8} \bigwedge_{j=1}^{7} \bigwedge_{k=j+1}^{8} (x_{ij} \to \neg x_{ik})$$

$$F_3 = \bigwedge_{j=1}^{8} \bigwedge_{i=1}^{7} \bigwedge_{k=i+1}^{8} (x_{ij} \to \neg x_{kj})$$

$$F_4 = \bigwedge_{i=2}^{8} \bigwedge_{j=1}^{7} \bigwedge_{k=1}^{\min\{i-1,8-j\}} (x_{ij} \to \neg x_{i-k,j+k})$$

$$F_5 = \bigwedge_{i=1}^{7} \bigwedge_{j=1}^{7} \bigwedge_{k=1}^{\min\{8-i,8-j\}} (x_{ij} \to \neg x_{i+k,j+k})$$

In F_4 und F_5 wird der Index k verwendet, um über die Felder zu laufen, die sich rechts von (i, j) befinden; die Minimum-Schranke für k sorgt dafür, dass die Indizes der Felder immer zwischen 1 und 8 bleiben.

(b) In jeder Spalte ist genau eine Dame. Entweder befindet sich diese in der unteren Hälfte, dann befindet sie sich in der gespiegelten Lösung in der oberen Hälfte, oder umgekehrt. Wir können also fordern, dass in den unteren vier Feldern der ersten Spalte eine Dame ist. (Statt den unteren vier Feldern könnte man auch die oberen vier nehmen, und statt der ersten Spalte eine beliebige andere.):

$$F \wedge (x_{11} \vee x_{21} \vee x_{31} \vee x_{41})$$

Aufgabe 2 BDDs (2+2+3 Punkte)

(a) Der dreistellige Junktor *ite* (if-then-else) ist wie folgt definiert:

$$ite(F, G, H) \equiv (F \wedge G) \vee (\neg F \wedge H)$$

Finden Sie eine Formel, die äquivalent ist zu $F \rightarrow G$ und nur F, G, *ite* und evtl. die Konstanten 0 oder 1 enthält, ggfs. mehrmals.

(b) Sei $v < w < x < y < z$. Erstellen Sie BDDs für die Formeln

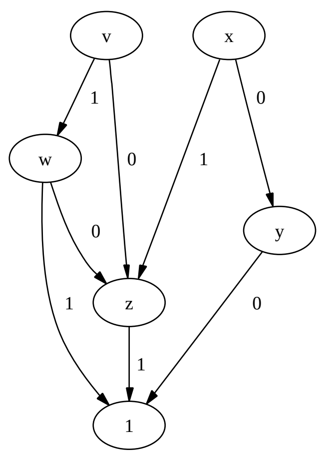
$$F_1 = (\neg z) \rightarrow (v \wedge w) \qquad \text{und} \qquad F_2 = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow x).$$

(c) Erstellen Sie einen BDD für die Formel $F = F_1 \vee F_2$.
Wie viele erfüllende, in v, w, x, y, z unterschiedliche Belegungen hat F?

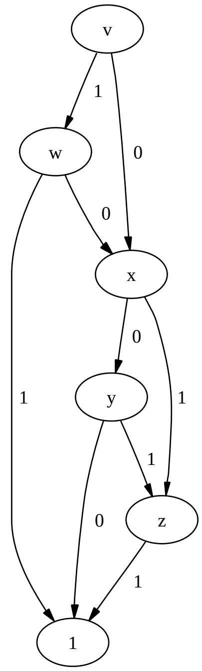
Aufgabe 2 **(Lösungsvorschlag)** *BDDs*

(a) $ite(F, G, 1)$

(b) Beide BDDs in einem Multi-BDD dargestellt (unter Weglassung des 0-Knotens):



(c) Der BDD für $F_1 \vee F_2$:



Zählung der erfüllenden Belegungen: Der z-Knoten hat Gewicht 1, der y-Knoten hat Gewicht $2 \cdot 1 + 2 = 3$, der x-Knoten hat Gewicht $3 + 2 \cdot 1 = 5$, der w-Knoten hat Gewicht $5 + 8 \cdot 1 = 13$, und der v-Knoten hat Gewicht $2 \cdot 5 + 13 = 23$. Es gibt also 23 erfüllende Belegungen.

Aufgabe 3 DPLL-Verfahren (3+2 Punkte)

(a) Wenden Sie das DPLL-Verfahren auf die untenstehende Formel F an, d.h. geben Sie eine maximale Herleitung aus F an. Ist F erfüllbar? Wenn ja, geben Sie eine erfüllende Belegung an.

$$F = \big\{\{\neg A, D\},\ \{A, \neg B\},\ \{\neg A, \neg D, \neg B\},\ \{B, C\},\ \{\neg A, B, \neg C, \neg D\},\ \{A, D\}\big\}$$

(b) Die Subsumption-Regel ist wie folgt:

> Wenn eine Formel F zwei Klauseln K, K' enthält mit $K \subseteq K'$, dann streiche K' aus F.

Finden Sie eine Formel F mit folgender Eigenschaft: Es gibt eine Herleitung aus F, in der die Subsumption-Regel benutzt wird, aber keine Herleitung, in der sie im ersten Schritt benutzt wird.

Aufgabe 3 **(Lösungsvorschlag)** *DPLL-Verfahren*

(a) Am Anfang haben wir den Block $\{F\}$ bzw.

$$\Big\{\big\{\{\neg A, D\},\ \{A, \neg B\},\ \{\neg A, \neg D, \neg B\},\ \{B, C\},\ \{\neg A, B, \neg C, \neg D\},\ \{A, D\}\big\}\Big\}$$

Durch Anwendung der Splitting-Regel mit A und anschließender One-Literal-Regel erhalten wir einen Block mit zwei Formeln, nämlich für A und $\neg A$:

$$\Big\{\{\{D\},\ \{\neg D, \neg B\},\ \{B, C\},\ \{B, \neg C, \neg D\}\},\ \ \{\{\neg B\},\ \{B, C\},\ \{D\}\}\Big\}$$

Auf beide Formeln können wir die Single-Literal-Regel mit D anwenden:

$$\Big\{\{\{\neg B\},\ \{B, C\},\ \{B, \neg C\}\},\ \ \{\{\neg B\},\ \{B, C\}\}\Big\}$$

Jetzt die Single-Literal-Regel mit $\neg B$, wieder auf beide Formeln:

$$\Big\{\{\{C\},\ \{\neg C\}\},\ \ \{\{C\}\}\Big\}$$

Und nochmal die Single-Literal-Regel mit C:

$$\Big\{\{\emptyset\},\ \ \emptyset\Big\}$$

Weitere Regeln lassen sich nicht anwenden, die Herleitung ist also maximal. Sie ist erfüllend, da der letzte Block die leere Formel enthält. Die Formel ist also erfüllbar, die erfüllende Belegung ist $A = 0, B = 0, C = 1, D = 1$, sie kann aus den Schritten abgelesen werden, die zur leeren Formel geführt haben.

(b) Sei $F = \big\{\{\neg A\},\ \{A, C\},\ \{B, C\}\big\}$. Keine Klausel ist Teilmenge einer anderen, also findet die Subsumptions-Regel keine Anwendung. Benutzt man die Single-Literal-Regel mit $\neg A$, so erhält man einen Block mit der Formel $\big\{\{C\},\ \{B, C\}\big\}$, hier kann die Subsumptions-Regel offensichtlich angewendet werden.

Aufgabe 4 Unerfüllbarkeit (4+4 Punkte)

Sei F eine aussagenlogische Formel, die eine Variable A enthält, und sei $G := F[A/0] \wedge F[A/1]$, wobei $F[A/b]$ mit $b = 0, 1$ die Formel beschreibt, die entsteht, wenn alle Vorkommen von A in F durch b ersetzt werden.

(a) Beweisen Sie: $G \wedge \neg F$ ist unerfüllbar.

(b) Sei H eine weitere Formel, die die Variable A *nicht* enthält, so dass $H \wedge \neg F$ unerfüllbar ist. Beweisen Sie, dass dann auch $H \wedge \neg G$ unerfüllbar ist.

Hinweise: Zeigen Sie in (a), dass für jede Belegung $\mathcal{A}$ gilt $\mathcal{A}(G \wedge \neg F) = 0$, indem Sie die Fälle $\mathcal{A}(A) = 0$ und $\mathcal{A}(A) = 1$ unterscheiden. In (b) können Sie (ohne Beweis) verwenden, dass für jede Formel F' gilt: F' ist unerfüllbar genau dann, wenn $F'[A/0]$ und $F'[A/1]$ beide unerfüllbar sind.

Aufgabe 4 (Lösungsvorschlag) *Unerfüllbarkeit*

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige Belegung. Angenommen, $\mathcal{A}(A) = 0$, dann ist $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(F[A/0])$. Wenn $\mathcal{A}(A) = 1$ ist, so ist $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(F[A/1])$. In beiden Fällen enthält die Konjunktion $G \wedge \neg F \equiv F[A/0] \wedge F[A/1] \wedge \neg F$ mindestens eine 0, daher $\mathcal{A}(G \wedge \neg F) = 0$.

(b) Es gilt (wg. de Morgan und Distributivgesetz):

$$\begin{aligned} H \wedge \neg G &\equiv H \wedge \neg(F[A/0] \wedge F[A/1]) \\ &\equiv H \wedge (\neg F[A/0] \vee \neg F[A/1]) \\ &\equiv (H \wedge \neg F[A/0]) \vee \neg(H \wedge \neg F[A/1]) \end{aligned}$$

Da A nicht in H vorkommt, ist die letzte Zeile äquivalent zu:

$$(H \wedge \neg F)[A/0] \vee \neg(H \wedge \neg F)[A/1] =: J$$

Sind zwei Formeln beide unerfüllbar, so ist auch ihre Disjunktion unerfüllbar. Mit dem Hinweis folgt aus $H \wedge \neg F$ unerfüllbar, dass obige Formel J unerfüllbar ist.

Aufgabe 5 Prädikatenlogik (2+4 Punkte)

(a) Gegeben seien folgende prädikatenlogische Formeln:

i) $F_1 = \forall x\big(P(x) \vee R(x)\big) \rightarrow \big(\forall x P(x) \wedge \forall x R(x)\big)$

ii) $F_2 = \forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \rightarrow \exists y\big(Q(y) \rightarrow P(y)\big)$

Geben Sie für beide Formeln jeweils (falls möglich) eine Struktur an, die die Formel erfüllt, und eine, die die Formel nicht erfüllt.

(b) Sei $F = \exists x\big(P(x) \rightarrow \forall y P(y)\big)$. Führen Sie folgende Schritte auf F durch:

i) Geben Sie eine Skolem-Normalform G von $\neg F$ (d.h. der *Negation* von F!) an, die keine Funktionssymbole (außer Konstanten) enthält.

ii) Geben Sie alle Herbrand-Strukturen von G an.

iii) Werten Sie G in allen Herbrand-Strukturen aus. Was folgt aus dieser Auswertung für F, d.h., ist F gültig, erfüllbar oder unerfüllbar?

Aufgabe 5 (Lösungsvorschlag) *Prädikatenlogik*

(a) Modell von F_1: $U_{\mathcal{A}} = \{1\}$, $P^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{A}} = \emptyset$
Modell von $\neg F_1$: $U_{\mathcal{B}} = \{1\}$, $P^{\mathcal{B}} = \{1\}$, $R^{\mathcal{B}} = \emptyset$
Modell von F_2: $U_{\mathcal{C}} = \{1\}$, $P^{\mathcal{C}} = Q^{\mathcal{C}} = \emptyset$
Modell von $\neg F_2$: $U_{\mathcal{D}} = \{1\}$, $P^{\mathcal{D}} = \emptyset$, $Q^{\mathcal{D}} = \{1\}$

(b) i) Unten wird mehrmals ausgenutzt, dass x nicht frei in $\exists y \neg P(y)$ vorkommt, und y nicht frei in in $\forall x P(x)$ vorkommt:

$$\begin{aligned}
\neg F &\equiv \forall x\big(P(x) \wedge \exists y \neg P(y)\big) \\
&\equiv \forall x P(x) \wedge \exists y \neg P(y) \\
&\equiv \exists y \forall x\big(P(x) \wedge \neg P(y)\big) \\
&\equiv_e \forall x\big(P(x) \wedge \neg P(a)\big) =: G
\end{aligned}$$

ii) Das Herbrand-Universum von G ist $D(G) = \{a\}$. Daher gibt es zwei Herbrand-Modelle $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ für G mit $U_{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{B}} = D(G) = \{a\}$ und $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$ sowie $P^{\mathcal{B}} = \{a\}$.

iii) Es gilt $\mathcal{A} \not\models G$ und $\mathcal{B} \not\models G$. Nach dem fundamentalen Satz der Prädikatenlogik ist G daher unerfüllbar. G ist erfüllbarkeitsäquivalent zu $\neg F$, also ist F gültig.

Aufgabe 6 Resolution (2+3+2 Punkte)

Vor einem Länderspiel erklärt Jogi Löw der Presse die Taktik und die Stimmung in seiner Mannschaft:

- Jeder Stürmer wird eingesetzt.
- Alle eingesetzten Spieler haben nichts gegeneinander.
- Jeder Spieler hat etwas gegen irgendeinen anderen Spieler.

Ein Journalist folgert, dass jeder Stürmer etwas gegen irgendeinen Nicht-Stürmer hat. Stimmt dies?

(a) Formalisieren Sie die Aussagen von Jogi Löw als eine prädikatenlogische Formel F und die des Journalisten als eine Formel J. Verwenden Sie folgende Prädikate: $S(x)$ bedeutet, dass x ein Stürmer ist; $E(x)$ bedeutet, dass x eingesetzt wird; $G(x,y)$ bedeutet, dass x etwas gegen y hat.

(b) Formen Sie die Formel $F \wedge \neg J$ in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolem-Normalform um. Geben Sie bei jedem Umformungsschritt an, ob er zu einer äquivalenten oder nur erfüllbarkeitsäquivalenten Formel führt.

(c) Sei H das Ergebnis der Umformung aus (b). Führen Sie das prädikatenlogische Resolutionsverfahren für H durch, und versuchen Sie, die leere Klausel herzuleiten. Bedeutet die Herleitung der leeren Klausel, dass der Journalist recht hat, oder dass er im Unrecht ist?

Aufgabe 6 **(Lösungsvorschlag)** *Resolution*

(a) Die Aussagen können wie folgt formalisiert werden:

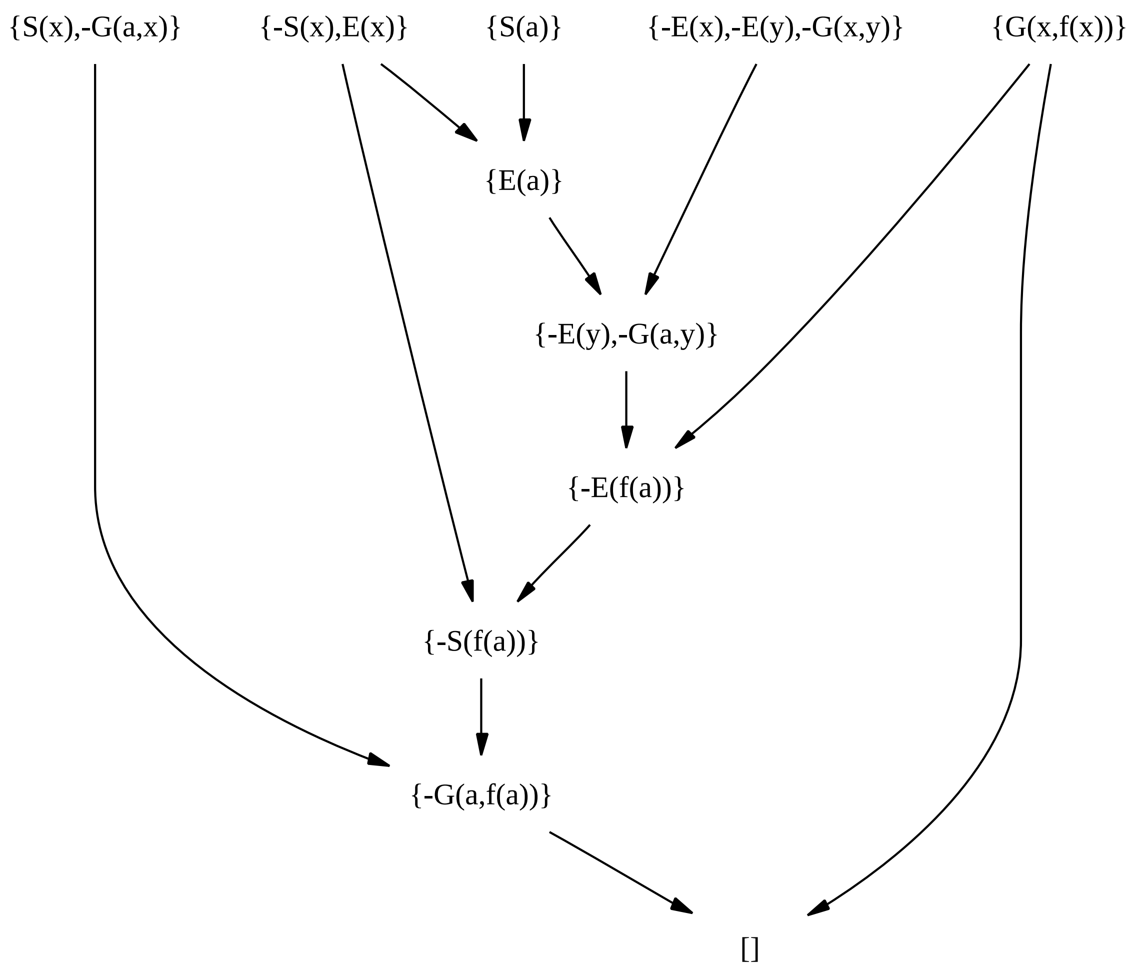
$$\begin{aligned} F &= \forall x\big(S(x) \to E(x)\big) \\ &\quad \wedge \forall x \forall y\big((E(x) \wedge E(y)) \to \neg G(x,y)\big) \\ &\quad \wedge \forall x \exists y G(x,y) \\ J &= \forall x\big(S(x) \to \exists y(\neg S(y) \wedge G(x,y))\big) \end{aligned}$$

(b) Im ersten Schritt wird J negiert, und einige Variablen werden umbenannt. Im zweiten Schritt werden die Quantoren in geeigneter Reihenfolge nach vorne gezogen, außerdem Implikationen in Disjunktionen umgewandelt. Im dritten Schritt wird skolemisiert.

$$\begin{aligned} F \wedge \neg J \;&\equiv\; \forall x\big(S(x) \to E(x)\big) \\ &\quad \wedge \forall x \forall y\big((E(x) \wedge E(y)) \to \neg G(x,y)\big) \\ &\quad \wedge \forall x \exists u G(x,u) \\ &\quad \wedge \exists v\big(S(v) \wedge \forall x(S(x) \vee \neg G(v,x))\big) \\ &\equiv\; \exists v \forall x \exists u \forall y \\ &\quad \Big(\big(\neg S(x) \vee E(x)\big) \\ &\quad\quad \wedge \big(\neg E(x) \vee \neg E(y) \vee \neg G(x,y)\big) \\ &\quad\quad \wedge G(x,u) \\ &\quad\quad \wedge \big(S(v) \wedge (S(x) \vee \neg G(v,x))\big)\Big) \\ &\equiv_e\; \forall x \forall y \\ &\quad \Big(\big(\neg S(x) \vee E(x)\big) \\ &\quad\quad \wedge \big(\neg E(x) \vee \neg E(y) \vee \neg G(x,y)\big) \\ &\quad\quad \wedge G(x,f(x)) \\ &\quad\quad \wedge S(a) \\ &\quad\quad \wedge \big(S(x) \vee \neg G(a,x)\big)\Big) \end{aligned}$$

(c) Der Resolutionsbeweis ist unten dargestellt ohne Angaben von Umbenennungen, die in keinem Fall notwendig sind, und ohne Angabe der Substitutionen, die offensichtlich sein sollten (meistens $[x/a]$;-).

Da die leere Klausel abgeleitet werden kann, ist $F \wedge \neg J$ unerfüllbar, also $F \to J$ gültig, daher ist die Schlussfolgerung des Journalisten korrekt.


{S(x),-G(a,x)}
{-S(x),E(x)}
{S(a)}
{-E(x),-E(y),-G(x,y)}
{G(x,f(x))}
{E(a)}
{-E(y),-G(a,y)}
{-E(f(a))}
{-S(f(a))}
{-G(a,f(a))}
[]