TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

WS 11/12
Einführung in die Informatik II **Übungsblatt 11**
Univ.-Prof. Dr. Andrey Rybalchenko, M.Sc. Ruslán Ledesma Garza 24.01.2011

Dieses behandelt Kapitel 10.4 und 10.5 aus dem Buch zur Vorlesung. Lesen Sie diese Kapitel!

Aufgabe 10.15 Betrachten Sie die folgende Definition.

$$rev : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$$

$$\begin{aligned} rev\ nil &= nil \\ rev\ (x :: xs) &= rev\ xs\ @\ [x] \end{aligned}$$

Geben Sie für die Prozedur *rev* die Rekursionsfunktion, die Rekursionsrelation sowie eine natürliche Terminierungsfunktion an.

Lösungsvorschlag 10.15:

a) Rekursionsfunktion:

$$r \in \mathcal{L}(X) \to \mathcal{T}(\mathcal{L}(X))$$

$$\begin{aligned} r\ nil &= \langle\,\rangle \\ r\ (x :: xs) &= \langle xs \rangle \end{aligned}$$

b) Rekursionsrelation:

$$R = \{(x :: xs, xs) \mid x :: xs \in \mathcal{L}(X)\}$$

c) Natürliche Terminiergunsfunktion:

$$\lambda\, xs \in \mathcal{L}(X)\,.\ |\ xs\ |$$

Aufgabe 10.16 Sei X eine Menge. Beweisen Sie mit struktureller Induktion, dass für alle Listen $xs, ys \in \mathcal{L}(X)$ gilt:

a) $|\ xs\ @\ ys\ | = |\ xs\ | + |\ ys\ |$

b) $|\ rev\ xs\ | = |\ xs\ |$

Lösungsvorschlag 10.16:

a) Sei $ys \in \mathcal{L}(X)$. Induktion über $xs \in \mathcal{L}(X)$.

i) $xs = nil$:

$$\begin{aligned} |\ nil\ @\ ys\ | &= |\ ys\ | && \text{Defn. @} \\ &= |\ nil\ | + |\ ys\ | && \text{Defn. } |\_| \end{aligned}$$

ii) $xs = x :: xs'$: Vermuten Sie: $|\ xs'\ @\ ys\ | = |\ xs'\ | + |\ ys\ |$.

$$\begin{aligned} |\ xs\ @\ ys\ | &= |\ (x :: xs')\ @\ ys\ | \\ &= |\ x :: (xs'\ @\ ys)\ | && \text{Defn. @} \\ &= 1 + |\ (xs'\ @\ ys)\ | && \text{Defn. } |\_| \\ &= 1 + |\ xs'\ | + |\ ys\ | && \text{I.H.} \\ &= |\ x :: xs'\ | + |\ ys\ | && \text{Defn. } |\_| \\ &= |\ xs\ | + |\ ys\ | && \text{Defn. } |\_| \end{aligned}$$

b) Sei $ys \in \mathcal{L}(X)$. Induktion über $xs \in \mathcal{L}(X)$.

i) $xs = nil$:

$$|\ rev\ nil\ | = |\ nil\ |$$

ii) $xs = x :: xs'$: Vermuten Sie: $|\ rev\ xs'\ | = |\ xs'\ |$.

$$\begin{array}{lll} |\ rev\ xs\ | & = |\ rev\ (x :: xs')\ | & \\ & = |\ rev\ xs'\ @\ [x]\ | & \text{Defn. } rev \\ & = |\ rev\ xs'\ | + |\ [x]\ | & \text{Teil (a)} \\ & = |\ xs'\ | + |\ [x]\ | & \text{I.H} \\ & = |\ x :: xs'\ | & \text{Defn. } |\_| \\ & = |\ xs\ | & \end{array}$$

Aufgabe 10.17 Sei X eine Menge. Beweisen Sie mit struktureller Induktion, dass für alle Listen $xs \in \mathcal{L}(X)$ gilt:

$$xs\ @\ nil = xs$$

Lösungsvorschlag 10.17:

Induktion über $xs \in \mathcal{L}(X)$.

a) $xs = nil$:

$$nil\ @\ nil = nil$$

b) $xs = x :: xs'$: Vermuten Sie: $xs'\ @\ nil = xs'$.

$$\begin{array}{lll} xs\ @\ nil & = (x :: xs')\ @\ nil & \\ & = x :: (xs'\ @\ nil) & \text{Defn. } @ \\ & = x :: xs' & \text{I.H.} \\ & = xs & \end{array}$$

Aufgabe 10.18 Die Länge von Listen lässt sich mit einer endrekursiven Prozedur bestimmen, die die folgende Funktion berechnet:

$$leni \in \mathbb{N} \times \mathcal{L}(X) \to \mathbb{N}$$

$$leni\ (a, xs) = a + |\ xs\ |$$

Konstruieren Sie eine endrekursive Prozedur, die die Funktion $leni$ berechnet und beweisen Sie die Korrekheit Ihrer Prozedur.

Lösungsvorschlag 10.18:

Sei die folgende Prozedur.

$$p\_len\ : \mathbb{N} \times \mathcal{L}(X) \to \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} p\_len\ (a, nil) &= a \\ p\_len\ (a, x :: xs) &= p\_len\ (a+1, xs) \end{aligned}$$

Wir jetzt beweisen dass p_len die Funktion $leni$ berechnet.

a) Es gilt: $Dom\ leni = Dom\ p\_len$

b) Wir beweisen dass $leni$ erfüllt die definierenden Gelichungen von p_len für alle $x \in Dom\ leni$. Fallunterscheidung.

i) Es gilt: $leni\ (a, nil) = a$.

ii) Wir beweisen dass $leni\ (a, x :: xs) = leni\ (a+1, xs)$.

$$\begin{aligned} leni\ (a, x :: xs) \quad &= a + \mid x :: xs \mid \\ &= a + 1 + \mid xs \mid && \text{Defn. } |\_| \\ &= leni(a+1, xs) && \text{Defn. } leni \end{aligned}$$

Aufgabe 10.19 Listen lassen sich mit einer endrekursiven Prozedur reversieren, die die folgende Funktion berechnet:

$$revi \in \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$$
$$revi\ (xs, ys) = rev\ ys\ @\ xs$$

Konstruieren Sie eine endrekursive Prozedur, die die Funktion *revi* berechnet und beweisen Sie die Korrekheit Ihrer Prozedur. Verwenden Sie dabei die Assoziativität der Konkatenation (Proposition 10.5).

Lösungsvorschlag 10.19:

Sei die folgende Prozedur.

$$p\_rev : \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$$

$$p\_rev\ (a, nil) = a$$
$$p\_rev\ (a, x :: xs) = p\_rev\ (x :: a, xs)$$

Wir jetzt beweisen dass *p_rev* die Funktion *revi* berechnet.

a) Es gilt: $Dom\ revi = Dom\ p\_rev$

b) Wir beweisen dass *revi* erfüllt die definierenden Gelichungen von *p_rev* für alle $x \in Dom\ revi$. Fallunterscheidung

   i) Wir beweisen dass $revi\ (a, nil) = a$.

$$\begin{aligned} revi\ (a, nil) &= rev\ nil\ @\ a \\ &= nil\ @\ a \\ &= a \end{aligned}$$

   ii) Wir beweisen dass $revi\ (a, x :: xs) = revi\ (x :: a, xs)$.

$$\begin{aligned} revi\ (a, x :: xs) \quad &= rev\ (x :: xs)\ @\ a \\ &= (rev\ xs\ @\ [x])\ @\ a && \text{Defn. } rev \\ &= rev\ xs\ @\ ([x]\ @\ a) && \text{Prop. 10.5} \\ &= rev\ xs\ @\ (x :: a) \\ &= revi\ (x :: a, xs) && \text{Defn. } revi \end{aligned}$$

Aufgabe 10.20 Betrachten Sie die folgende Definition.

$$foldl \in (X \times Y \to Y,) \times Y \times \mathcal{L}(X) \to Y$$

$$foldl\ (f, y, nil) = y$$
$$foldl\ (f, y, x :: xs) = foldl\ (f, f\ (x, y), xs)$$

Seien X, Y Mengen und f eine Funktion $X \times Y \to Y$. Beweisen Sie durch strukturelle Induktion über xs, dass gilt:

$$\forall y \in Y\,.\,\forall ys \in \mathcal{L}(X)\,.\,\forall xs \in \mathcal{L}(X)\,.\,foldl\ (f, y, xs\ @\ ys) = foldl\ (f, foldl\ (f, y, xs), ys)$$

Lösungsvorschlag 10.20:

Sei $y \in Y$ und $ys \in \mathcal{L}(X)$. Induktion über $xs \in \mathcal{L}(X)$.

a) $xs = nil$:

$$\begin{aligned} foldl\ (f, y, nil\ @\ ys) &= foldl\ (f, y, ys) && \text{Defn. @} \\ &= foldl\ (f, foldl\ (f, y, nil), ys) && \text{Defn. } foldl \end{aligned}$$

b) $xs = x :: xs'$: Vermuten Sie $foldl\ (f, y, xs'\ @\ ys) = foldl\ (f, foldl\ (f, y, xs'), ys)$.

$$\begin{aligned} foldl\ (f, y, xs\ @\ ys) &= foldl\ (f, y, (x :: xs')\ @\ ys) \\ &= foldl\ (f, x, y :: (xs'\ @\ ys)) && \text{Defn. @} \\ &= foldl\ (f, f\ (x, y), xs'\ @\ ys) && \text{Defn. } foldl \\ &= foldl\ (f, foldl\ (f, f\ (x, y), xs'), ys) && \text{I.H.} \\ &= foldl\ (f, foldl\ (f, y, x :: xs'), ys) && \text{Defn. } foldl \\ &= foldl\ (f, foldl\ (f, y, xs), ys) \end{aligned}$$

Aufgabe 10.22 In §4.4 Haben Sie gelernt, dass Listen mit *foldl* reversiert werden können. Jetzt können Sie die Korrektheit dieses Vorgehens beweisen.

Sei X eine Menge und sei f die Funktion $\lambda(x, xs) \in X \times \mathcal{L}(X)\,.\, x\ :: xs$. Für die Korrektheit der Reversion mit *foldl* muss die Gültikeit der Aussage $\forall xs \in \mathcal{L}(X)\,.\, rev\ xs = foldl\ (f, nil, xs)$ gezeigt werden. Suchen Sie eine geeignete Verstärkung dieser Korrektheitsaussage und beweisen Sie die Gültigkeit der Verstärkung durch strukturelle Induktion über xs. Orientieren Sie sich an der Funktion *revi* aus Aufgabe 10.19.

Lösungsvorschlag 10.22:

Sei die Verstärkung:

$$\forall a \in \mathcal{L}(X)\,.\,\forall xs \in \mathcal{L}(X)\,.\, rev\ xs\ @\ a = foldl\ (f, a, xs)$$

Sei $a \in \mathcal{L}(X)$. Wir verfahren durch Induktion über $xs \in \mathcal{L}(X)$.

a) $xs = nil$:

$$\begin{aligned} rev\ nil\ @\ a &= nil\ @\ a \\ &= a \\ &= foldl\ (f, a, xs) && \text{Defn. } foldl \end{aligned}$$

b) $xs = x :: xs'$: Vermuten Sie $rev\ xs'\ @\ a = foldl\ (f, a, xs')$.

$$\begin{aligned} rev\ xs\ @\ a &= rev\ (x :: xs')\ @\ a \\ &= (rev\ xs'\ @\ [x])\ @\ a && \text{Defn. } rev \\ &= rev\ xs'\ @\ ([x]\ @\ a) && \text{Prop. 10.5} \\ &= rev\ xs'\ @\ (x :: a) \\ &= rev\ xs'\ @\ f\ (x, a) && \text{Defn. } f \\ &= foldl\ (f, f\ (x, a), xs') && \text{I.H.} \\ &= foldl\ (f, a, x :: xs') && \text{Defn. } foldl \\ &= foldl\ (f, a, xs) \end{aligned}$$