TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

WS 11/12

Einführung in die Informatik II — **Übungsblatt 10**

Univ.-Prof. Dr. Andrey Rybalchenko, M.Sc. Ruslán Ledesma Garza — 17.01.2011

Dieses behandelt Kapitel 9.6, 9.7, 10.1, und 10.2 aus dem Buch zur Vorlesung. Lesen Sie diese Kapitel!

Aufgabe 10.5 Seien *fac* und f wie in §10.2 gegeben. Beweisen Sie $\forall b \in \mathbb{N} : f(n{+}1, \mathit{fac}\ n) = (n{+}2, \mathit{fac}\ (n{+}1))$. Benötigen Sie nur die Definitionen von f und fac.

Aufgabe Terminierungsfunktion Geben Sie eine natürliche Terminierungsfunktion für die folgende Prozedur an.

$$p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$$
$$p(x, y) = \text{if } x < y \text{ then } p(x+1, y) \text{ else if } x > y \text{ then } p(x, y+1) \text{ else } x$$

Aufgabe 9.15 Beweisen Sie, dass die Ergebnisfunktion f der Prozedur fib (Aufgabe 9.3) die Gleichung

$$2 * f(n+1) = -f(n) + f(n+3)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Aufgabe 9.18 Schreiben Sie in Standard ML eine Prozedur `power : int * int` $\to$ `int`, die mithilfe einer endrekursiven Hilfsprozedur für x und $n \geq 0$ die Potenz x^n bestimmt.

Aufgabe 9.20 Zeigen Sie, dass die Prozedur

$$p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$p\ n = \text{if } n < 1 \text{ then } 1 \text{ else } p(n-1) + 2n + 1$$

die Funktion $f := \big(\lambda n \in \mathbb{N}.(n+1)^2\big)$ berechnet.

Aufgabe 9.22 Beweisen Sie, dass die Prozedur

$$p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$$
$$p(x, y) = \text{if } x < y \text{ then } p(x+1, y) \text{ else if } x > y \text{ then } p(x, y+1) \text{ else } x$$

die Funktion $f := \big(\lambda(x, y) \in \mathbb{Z}^2.\ \max\{x, y\}\big)$ berechnet.

Aufgabe 10.3 Zeigen Sie, dass iter und die unten definierte Prozedur iter' semantisch äquivalent sind.

$\mathit{iter}' : \mathbb{N} \times \mathbb{X} \times (X \to X) \to X$
$\mathit{iter}'(0, x, f) = x$
$\mathit{iter}'(n, x, f) = f(\mathit{iter}'(n-1, x, f))$ für n > 0

Aufgabe 10.4 Man kann Proposition 10.2 auch ohne die Benutzung der Vertauschungseigenschaft beweisen. Dazu zeigt man die allgemeinere Aussage $\forall x \in \mathbb{Z}\ \forall s \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N} : \mathit{iter}(n, s, \lambda a.a \cdot x) = s \cdot x^n$. Beweisen Sie diese Aussage durch Induktion.

Aufgabe 10.7 Seien *fib*, *iter* und f wie in §10.2 gegeben. Beweisen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}_+ : (\mathit{fib}(n-1), \mathit{fib}\ n) = \mathit{iter}(n-1,(0,1),f)$. Der Beweis gelingt mit Induktion über n sowie die Aussage A

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ : f(\mathit{fib}(n-1)), \mathit{fib}\ n) = (\mathit{fib}\ n, \mathit{fib}(n+1))$$

und Proposition 10.1 auf S. 202. Orientieren Sie sich am Beweis von Proposition 10.2 auf S. 202.