TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK

WS 11/12

Einführung in die Informatik II **Übungsblatt 10**

Univ.-Prof. Dr. Andrey Rybalchenko, M.Sc. Ruslán Ledesma Garza 17.01.2011

Dieses behandelt Kapitel 9.6, 9.7, 10.1, und 10.2 aus dem Buch zur Vorlesung. Lesen Sie diese Kapitel!

Aufgabe 10.5 Seien *fac* und f wie in §10.2 gegeben. Beweisen Sie $\forall b \in \mathbb{N} : f(n+1, fac\ n) = (n+2, fac\ (n+1))$. Benötigen Sie nur die Definitionen von f und *fac*.

Lösungsvorschlag 10.5: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(n+1, fac\ n) &= (n+2, (n+1)(fac\ n)) && \text{durch Defn. } f \\ &= (n+2, fac(n+1)) && \text{durch Defn. } fac \end{aligned}$$

Aufgabe Terminierungsfunktion Geben Sie eine natürliche Terminierungsfunktion für die folgende Prozedur an.

$$p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$$
$$p(x, y) = \text{if } x < y \text{ then } p(x+1, y) \text{ else if } x > y \text{ then } p(x, y+1) \text{ else } x$$

Lösungsvorschlag Terminierungsfunktion: $tf : \lambda(x, y) \in \mathbb{Z}^2.|x - y|$

Aufgabe 9.15 Beweisen Sie, dass die Ergebnisfunktion f der Prozedur fib (Aufgabe 9.3) die Gleichung

$$2 * f(n+1) = -f(n) + f(n+3)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Lösungsvorschlag 9.15: Die Ergebnisfunktion ist $f := \lambda x \in N$. if $n < 2$ then n else $f(n-1) + f(n-2)$.

$$\begin{aligned} -f(n) + f(n+3) &= -f(n) + f(n+2) + f(n+1) && \text{durch Defn. fib} \\ &= -f(n) + f(n) + f(n1) + f(n+1) && \text{durch Defn. fib} \\ &= 2 * f(n+1) \end{aligned}$$

Aufgabe 9.18 Schreiben Sie in Standard ML eine Prozedur `power : int * int` $\to$ `int`, die mithilfe einer endrekursiven Hilfsprozedur für x und $n \geq 0$ die Potenz x^n bestimmt.

Lösungsvorschlag 9.18:

```
fun power (x, n) =
  let
    fun p (a, x, 0) = a
      | p (a, x, n) = p (a * x, x, n - 1)
  in p(1, x, n) end
```

Aufgabe 9.20 Zeigen Sie, dass die Prozedur

$$p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$p\ n = \text{if } n < 1 \text{ then } 1 \text{ else } p(n-1) + 2n + 1$$

die Funktion $f := \big(\lambda n \in \mathbb{N}.(n+1)^2\big)$ berechnet.

Lösungsvorschlag 9.20:

a) $Dom(p) = Dom(f)$

b) i) $n = 0$: Beweisen Sie dass $f\ 0 = 1$. Dann gilt: $f\ 0 = 1^2 = 1$.

ii) Beweisen Sie dass $f\ n = f(n-1) + 2n + 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f\ n &= (n+1)^2 && \text{durch Defn. } f \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= f(n-1) + 2n + 1 && \text{durch Defn. } f \end{aligned}$$

Aufgabe 9.22 Beweisen Sie, dass die Prozedur

$p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$

$p(x,y) = \text{if } x < y \text{ then } p(x+1,y) \text{ else if } x > y \text{ then } p(x,y+1) \text{ else } x$

die Funktion $f := \big(\lambda(x,y) \in \mathbb{Z}^2.\ \max\{x,y\}\big)$ berechnet.

Lösungsvorschlag 9.22: vorgeschlagene Terminierungsfunktion : $tf : \lambda(x,y) \in \mathbb{Z}^2.|x-y|$

a) $Dom(p) = Dom(f)$

b) $|x-y| = 0$**:** Beweisen Sie dass $f(x,y) = x$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,x) \\ &= max\{x,x\} \\ &= x \end{aligned}$$

$|x-y| > 0$**:**

Wenn $x > y$**:** Beweisen Sie dass $f(x,y) = f(x,y+1)$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= max\{x,y\} \\ &= max\{x,y+1\} && \text{durch } x \geq y+1 \\ &= f(x,y+1) \end{aligned}$$

Wenn $x < y$**:** Beweisen Sie dass $f(x,y) = f(x+1,y)$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= max\{x,y\} \\ &= max\{x+1,y\} && \text{durch } y \geq x+1 \\ &= f(x+1,y) \end{aligned}$$

Aufgabe 10.3 Zeigen Sie, dass iter und die unten definierte Prozedur iter' semantisch äquivalent sind.

$iter' : \mathbb{N} \times \mathbb{X} \times (X \to X) \to X$
$iter'(0,x,f) = x$
$iter'(n,x,f) = f(iter'(n-1,x,f))$ für n > 0

Lösungsvorschlag 10.3:

a) Argumentbereich beider Prozeduren sind identisch

b) Induktion um zu Zeigen, dass die Ergebnisfunktionen beider Prozeduren identisch sind:

$n = 0 : iter(0,x,f) = x = iter'(0,x,f)$

$m = n + 1 :$

$$
\begin{aligned}
\mathit{iter}'(n+1,x,f) &= f(\mathit{iter}'(n,x,f)) && \text{durch Defn. } \mathit{iter}' \\
&= f(\mathit{iter}(n,x,f)) && \text{durch Induktion Hypothese} \\
&= \mathit{iter}(n+1,x,f) && \text{durch Prop. 10.1}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10.4 Man kann Proposition 10.2 auch ohne die Benutzung der Vertauschungseigenschaft beweisen. Dazu zeigt man die allgemeinere Aussage $\forall x \in \mathbb{Z}\ \forall s \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N} : \mathit{iter}(n, s, \lambda a.a \cdot x) = s \cdot x^n$. Beweisen Sie diese Aussage durch Induktion.

Lösungsvorschlag 10.4:

a) $n = 0 : \mathit{iter}(0, s, \lambda a.a \cdot x) = s = s \cdot x^0$

b) $m = n + 1 :$ Vermuten Sie $\mathit{iter}(n, s, \lambda a.a \cdot x) = s \cdot x^n$. Beweisen Sie $\mathit{iter}(m, s, \lambda a.a \cdot x) = s \cdot x^m$.

$$
\begin{aligned}
\mathit{iter}(m, s, \lambda a.a \cdot x) &= \mathit{iter}(n+1, s, \lambda a.a \cdot x) \\
&= \mathit{iter}(n, s \cdot x, \lambda a.a \cdot x) && \text{durch Defn. } \mathit{iter} \\
&= s \cdot x \cdot x^n && \text{durch Induktion Hypothese} \\
&= s \cdot x^{n+1} \\
&= s \cdot x^m
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10.7 Seien *fib*, *iter* und f wie in §10.2 gegeben. Beweisen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}_+ : (\mathit{fib}(n-1), \mathit{fib}\ n) = \mathit{iter}(n-1, (0,1), f)$. Der Beweis gelingt mit Induktion über n sowie die Aussage A

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ : f(\mathit{fib}(n-1)), \mathit{fib}\ n) = (\mathit{fib}\ n, \mathit{fib}(n+1))$$

und Proposition 10.1 auf S. 202. Orientieren Sie sich am Beweis von Proposition 10.2 auf S. 202.

Lösungsvorschlag 10.7:

a) $n = 1 : (\mathit{fib}\ 0, \mathit{fib}\ 1) = (0, 1) = \mathit{iter}(0, (0,1), f)$

b) $m = n + 1 :$ Vermuten Sie $(\mathit{fib}(n-1), \mathit{fib}\ n) = \mathit{iter}(n-1, (0,1), f)$. Beweisen Sie $(\mathit{fib}(m-1), \mathit{fib}\ m) = \mathit{iter}(m-1, (0,1), f)$.

$$
\begin{aligned}
(\mathit{fib}(m-1), \mathit{fib}\ m) &= (\mathit{fib}\ n, \mathit{fib}(n+1)) \\
&= f(\mathit{fib}(n-1), \mathit{fib}\ n) && \text{durch Aussage A} \\
&= f(\mathit{iter}(n-1, (0,1), f)) && \text{durch Induktion Hypothese} \\
&= \mathit{iter}(n, (0,1), f) && \text{durch Prop. 10.1} \\
&= \mathit{iter}(m-1, (0,1), f)
\end{aligned}
$$