



Einführung in die Informatik II

Univ.-Prof. Dr. Andrey Rybalchenko, A. Herz, K. Apinis

Dieses Blatt behandelt Kapitel 9.1 - 9.9 aus dem Buch zur Vorlesung.

Aufgabe 9.2

$\text{fac}' : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$\text{fac}' x = \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x \cdot \text{fac}'(x - 1)$

$\text{euclid} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$\text{euclid } (x, y) = \text{if } y = 0 \text{ then } x \text{ else euclid } (y, x \bmod y)$

$\text{gcd} : \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$

$\text{gcd } (x, x) = x$

$\text{gcd } (x, y) = \text{gcd } (x - y, y)$ (für $x > y$)

$\text{gcd } (x, y) = \text{gcd } (x, y - x)$ (für $x < y$)

Bleiben die Wohlgeformtheitsbedingungen für die definierenden Gleichungen gültig, wenn man bei der Prozedur

- fac' den Argumentbereich zu \mathbb{N} verändert?
- euclid den Ergebnisbereich zu \mathbb{N}_+ verändert?
- gcd den Argumentbereich zu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und den Ergebnisbereich zu \mathbb{N} verändert?

Aufgabe 9.6 Geben Sie Rekursionsfunktion der Prozedur fac' an.

Aufgabe 9.7 Geben Sie eine terminierende und baumrekursive Prozedur $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ an, die für jedes Argument das Ergebnis 0 liefert.

Aufgabe 9.12 Sei eine Prozedur mit der folgenden Rekursionsfunktion gegeben:

$\lambda x \in \mathbb{Z}. \text{if } x < 0 \text{ then } \langle x - 5 \rangle \text{ else if } x < 4 \text{ then } \langle \rangle \text{ else } \langle x - 3, x - 2 \rangle$

- Geben Sie den Argumentbereich der Prozeduran.
- Geben Sie den Rekursionsbaum für das Argument 8 an.
- Geben Sie den Definitionsbereich der Prozedur an.

Aufgabe 9.13 Geben Sie die Rekursionsrelation der Prozedur fac' an.

Aufgabe 9.26

Geben Sie eine rekursive Prozedur $p : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}$ an, die für $n \in \mathbb{N}_+$ die Summe $1 + 3 + \dots + (2n - 1)$ der ungeraden Zahlen von 1 bis $2n - 1$ berechnet. Beweisen Sie, dass Ihre Prozedur die Funktion $\lambda n \in \mathbb{N}_+. n^2$ berechnet.

Aufgabe 9.22* Beweisen Sie, dass die Prozedur

$$p : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$p(x, y) = \text{if } x < y \text{ then } p(x + 1, y) \text{ else if } x > y \text{ then } p(x, y + 1) \text{ else } x$$

die Funktion $\lambda(x, y) \in \mathbb{Z}^2$. $\max\{x, y\}$ berechnet.

Aufgabe 9.15* Beweisen Sie, dass die Ergebnisfunktion f der Prozedur fib die Gleichung $2 * f(n + 1) = -f(n) + f(n + 3)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

Aufgabe 9.27* Geben Sie eine rekursive Prozedur $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ an, die für $n \in \mathbb{N}$ die Summe $0^2 + 1^2 + \dots + n^2$ berechnet. Beweisen Sie, dass Ihre Prozedur für alle $n \in \mathbb{N}$ das Ergebnis $n(2n^2 + 3n + 1)/6$ liefert.