SS 2013

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Javier Esparza

Fakultät für Informatik
TU München

http://www7.in.tum.de/um/courses/dwt/ss13

Sommersemester 2013

Teil VI

Markov-Ketten

Markov-Ketten

Markov-Ketten modellieren mehrstufige Experimente mit unendlich vielen Stufen.

Der Ausgang einer Stufe bestimmt welches Experiment in der nächsten Stufe ausgeführt wird.

Erinnerung: Markov-Diagramme

Definition 173

Ein (verallgemeinertes) Markov-Diagramm $D = (Q, T, \delta)$ besteht aus

- einer (nicht notwendigerweise endlichen) Menge Q von Zuständen,
- einer Menge $T \subseteq Q \times Q$ von Transitionen, und
- einer W'keitsfunktion $\delta\colon T \to (0, 1]$, die Folgendes erfüllt für jeden Zustand q:

$$\sum_{(q,q') \in T} \delta(q, q') = 1 \, .$$

Definition einer Markov-Kette

Definition 174

Eine W'keitsverteilung oder Verteilung für ein Markov-Diagramm mit Zustandsmange Q ist eine Funktion $v\colon Q \to [0,1]$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{q \in Q} v(q) = 1 \,.$$

Definition 175

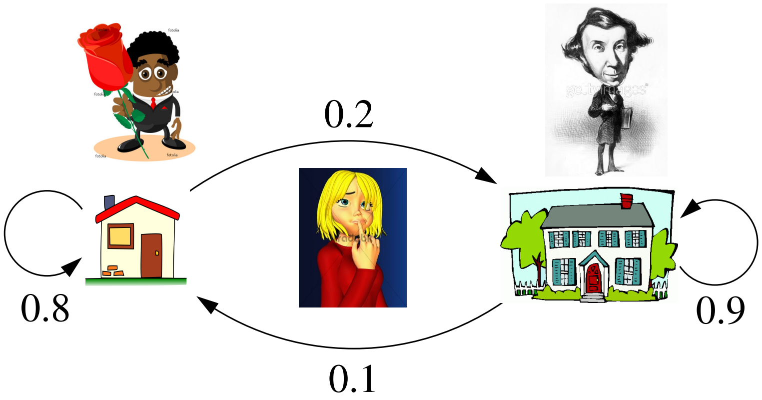
Eine Markov-Kette ist ein Tuple $M = (Q, T, \delta, \pi_0)$, wobei:

- (Q, T, δ) ist ein Markov-Diagramm und
- $\pi_0\colon Q \to [0,1]$ ist die Anfangsverteilung.

Eine Markov-Kette ist endlich bzw. abzählbar, wenn Q endlich bzw. abzählbar ist.

Die ménàge a trois von Armand, Bertrand und Cécile I

Beispiel 176 (Heute im Theatiner, 18:00)



Die ménàge a trois von Armand, Bertrand und Cécile II

Fragen von Armand an Denis, der sich in W'keitstheorie auskennt:

- Heute Morgen (Donnerstag) ist Cécile zu Bertrand gegangen. Mit welcher W'keit wird sie den Sonntag mit mir verbringen?
- Wenn Cécile mich verlässt, wie lange dauert es im Schnitt, bis Sie zurückkommt?
- Wenn diese Situation für immer so weiter geht, wieviel Prozent der Tage wird Cécile mit mir verbringen?

Wir untersuchen Methoden, um diese Fragen zu beantworten.

W'keitsraum einer Markov-Kette I

Definition 177

Ein Pfad einer Markov-Kette $M = (Q, T, \delta, \mathcal{Q}_0)$ ist eine endliche oder unendliche Sequenz $\sigma = q_0\, q_1 \ldots q_k \ldots$ von Zuständen mit $k \geq 0$ und $(q_i, q_{i+1}) \in T$ für alle $q_i\, q_{i+1}$ in σ.

Π bzw. Π_ω bezeichnen die Menge aller endlichen bzw. unendlichen Pfaden von M.

$\sigma(k)$ bezeichnet den Zustand q_k, d.h. $\sigma = \sigma(0)\, \sigma(1) \ldots \sigma(k) \ldots$.

Die Konkatenation von $\sigma \in \Pi$ und $\sigma' \in \Pi \cup \Pi_\omega$ wird mit $\sigma \cdot \sigma'$ oder $\sigma\, \sigma'$ bezeichnet.

Sei $\sigma \in \Pi$ ein endlicher Pfad. Die von σ generierte Zylindermenge $Cyl(\sigma)$ ist die Menge aller unendlichen Pfaden $\sigma' \in \Pi_\omega$ mit σ als Präfix.

W'keitsraum einer Markov-Kette II

Definition 178

Der W'keitsraum einer abzählbaren Markov-Kette M mit Anfangsverteilung $\mathcal{Q}_0$ ist die Triple $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ mit

- $\Omega = \Pi_\omega$.
- $\mathcal{A}$ enthält die von den Zylindermengen generierten Borel'sche Mengen, d.h.:
  - $Cyl(\sigma) \in \mathcal{A}$ für jedes $\sigma \in \Pi$.
  - Wenn $A \in \mathcal{A}$, dann $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.
  - Wenn $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.
- Die W'keitsfunktion $\Pr$ ist die einzige Funktion, die

$$\Pr\left[Cyl(q_0 q_1 \ldots q_n)\right] = \mathcal{Q}_0(q_0) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \delta(q_i, q_{i+1})$$

  und die Kolmogorov-Axiome erfüllt.

Zufallsvariablen einer Markov-Kette

Definition 179

Sei $M = (Q, T, \delta, \mathcal{Q}_0)$ eine abzählbare Markov-Kette.

Für jedes $t \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet X_t die Zufallsvariable $X_t \colon \Omega \to Q$ mit

$$X_t(\sigma) = \sigma(t) \; .$$

- X_t gibt den Zustand der Kette zum Zeitpunkt t.
- X_t ist wohldefiniert: Man kann leicht zeigen, dass für jeden Zustand $q \in Q$ die Menge „$X_t = q$“ Borel ist.
- Für alle $t \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \Pr[X_{t+1} = q' \mid X_t = q] &= \delta(q, q') \\ \Pr[X_{t+1} = q_{t+1} \mid X_t = q_t, \ldots, X_0 = q_0] &= \delta(q, q') \; . \end{aligned}$$

25. Übergangswahrscheinlichkeiten

Übergangsw'keiten I: Übergangsmatrix

Definition 180

Sei $M = (Q, T, \delta, \mathcal{Q}_0)$ eine endliche Markov-Kette mit $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$.

Die $n \times n$ Matrix $P = (p_{ij})_{0 \le i,j < n}$ mit

$$p_{ij} = \delta(q_i, q_j) = \Pr[X_{t+1} = q_j \mid X_t = q_i]$$

ist die Übergangsmatrix von M.

Beispiel 181

Die Matrix der Armand-Bertrand-Cécile-Kette (mit $q_1 :=$ Armand und $q_2 :=$ Bertrand) ist:

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Übergangsw'keiten II: Berechnung

Sei $\mathcal{Q}_t = (\ \Pr[X_t = q_1], \ldots \Pr[X_t = q_n]\ )$

Es gilt

$$\Pr[X_0 = q_k] = \mathcal{Q}_0(q_k)$$

$$\begin{aligned}\Pr[X_{t+1} = q_k] &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[X_{t+1} = q_k \mid X_t = q_i] \cdot \Pr[X_t = q_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_{ik} \cdot \Pr[X_t = q_i]\end{aligned}$$

also

$$(\mathcal{Q}_{t+1})_k = \sum_{i=1}^{n} p_{ik} \cdot (\mathcal{Q}_t)_i$$

und in Matrixschreibweise

$$\mathcal{Q}_{t+1} = \mathcal{Q}_t \cdot P$$

Übergangsw'keiten III: Berechnung

Mit der Matrixschreibweise erhalten wir für alle $t, k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{Q}_t = \mathcal{Q}_0 \cdot P^t \qquad \mathcal{Q}_{t+k} = \mathcal{Q}_t \cdot P^k$$

Beispiel 182 (Erste Frage von Armand)

Heute Morgen (Donnerstag) ist Cécile zu Bertrand gegangen. Mit welcher W'keit wird sie den Sonntag mit mir verbringen?

Modellierung: Sei $\mathcal{Q}_0 = (0, 1)$.
Gesucht wird $\mathcal{Q}_3(q_1) = \Pr[X_3 = q_1]$.

$$\mathcal{Q}_3 = \mathcal{Q}_0 \cdot P^3 = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}^3 = (0.219, 0.781)$$

Die W'keit beträgt somit 0.219.

Übergangsw'keiten IV: Exponentiation von Matrizen

Wenn P diagonalisierbar ist, so existiert eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix B mit

$$P = B \cdot D \cdot B^{-1}$$

und somit

$$P^k = B \cdot D^k \cdot B^{-1}$$

wobei D^k sehr leicht zu berechnen ist. Die Diagonale von D enthält die Eigenwerte von P, d.h., die λ-Lösungen der Gleichung

$$P \cdot v = \lambda v$$

Die Spalten von B sind die Eigenvektoren von P, d.h., die v-Lösungen derselben Gleichung.

Übergangsw'keiten IV: Berechnung von D und B

Beispiel 183

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$|P - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} 0.8 - \lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.7$$

Wir erhalten: $\lambda_1 = 0.7$ und $\lambda_2 = 1$.

Dazugehörige Eigenvektoren:

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \nu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Übergangsw'keiten V: Berechnung von D und B

Damit gilt

$$D = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich z.B.

$$P^{10} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.7^{10} & 0 \\ 0 & 1^{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.352 & 0.648 \\ 0.324 & 0.676 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die W'keit, dass Cécile am 10. Juli bei Armand bzw. Bertrand ist, wenn sie den 1. Juli bei Bertrand verbringt:

$$\mathcal{Q}_{10} = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0.352 & 0.648 \\ 0.324 & 0.676 \end{pmatrix} = (0.324, 0.676)$$

26. Ankunftsw'keiten und Übergangszeiten

Ankunftsw'keiten und Übergangszeiten

Wir untersuchen Fragestellungen auf, die sich auf zwei bestimmte Zustände q_i und q_j beziehen:

- Wie wahrscheinlich ist es, von q_i irgendwann nach q_j zu kommen?
- Wie viele Schritte benötigt die Kette im Mittel, um von q_i nach q_j zu gelangen?

Bemerkung: Die zweite Frage wurde schon im Wesentlichen im Abschnitt „Markov-Diagramme“ betrachtet.

Übergangszeiten

Definition 184

Sei T_j die Zufallsvariable

$$T_j(\sigma) := \begin{cases} \min\{n \geq 0 \mid X_n(\sigma) = q_j\} & \text{wenn Menge nichtleer} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Die bedingte Zufallsvariable

$$T_{ij} := T_j \mid „X_0 = q_i“$$

nennen wir die Übergangszeit (engl. hitting time) von q_i nach q_j.

T_{ij} zählt die Anzahl der Schritte, die für den Weg von q_i nach q_j benötigt werden.

Notation: $h_{ij} := \mathbb{E}[T_{ij}]$ (falls der bedingte Erwartungswert existiert).

Rückkehrzeiten

Im Fall $q_i = q_j$ gilt $T_{ii} = 0$ weil "die Kette schon in q_i ist".

Wir untersuchen auch, wie lange es dauert, bis Zustand q_i zu einem späteren Zeitpunkt wieder besucht wird.

Definition 185

Sei T'_j die Zufallsvariable

$$T'_j(\sigma) := \begin{cases} \min\{n \geq 1 \mid X_n(\sigma) = q_j\} & \text{wenn Menge nichtleer} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Die bedingte Zufallsvariable

$$T_i := T'_i \mid \text{„}X_0 = q_i\text{“}$$

ist die Rückkehrzeit (engl. recurrence time) von q_i.

Notation: $h_i := \mathbb{E}[T_i]$ (falls der bedingte Erwartungswert existiert).

Ankunfts- und Rückkehrw'keiten

Definition 186

Die Ankunftsw'keit f_{ij}, vom Zustand q_i nach beliebig vielen Schritten in den Zustand q_j zu gelangen ist definiert durch

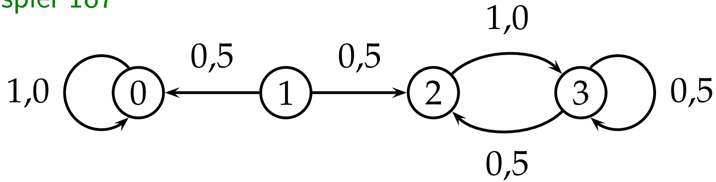
$$f_{ij} := \Pr[T_j < \infty \mid X_0 = q_i].$$

Die Rückkehrw'keit f_i, vom Zustand q_i nach beliebig vielen Schritten (mindestens 1) zurück zum Zustand q_i zu kehren ist definiert durch

$$f_i := \Pr[T_i < \infty \mid X_0 = q_i].$$

Ein Beispiel

Beispiel 187



Für alle $\sigma \in \Pi_\omega$ gilt

$$T_0(\sigma) = 1 \qquad T_{01}(\sigma) = T_{02}(\sigma) = T_{03}(\sigma) = \infty$$

$$T_{10}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_1(\sigma) = 0 \\ \infty & \text{falls } X_1(\sigma) = 2 \end{cases}$$

Es gilt auch

$$f_{10} = 0.5\ ,\ f_{32} = 1\ ,\ f_2 = 1 \quad \text{und} \quad h_{10} = \infty\ ,\ h_{32} = 2$$

Berechnung von f_{ij} und h_{ij} I

Lemma 188

Für die erwarteten Übergangs-/Rückkehrzeiten gilt

$$h_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} h_{kj} \qquad \text{für alle } q_i, q_j \in Q, q_i \neq q_j$$

$$h_j = 1 + \sum_{k \neq j} p_{jk} h_{kj} \qquad \text{für alle } q_j \in Q$$

sofern die Erwartungswerte h_{ij} *und* h_{kj} *existieren.*

Für die Ankunfts-/Rückkehrwahrscheinlichkeiten gilt analog

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj} \qquad \text{für alle } q_i, q_j \in Q, q_i \neq q_j$$

$$f_j = p_{jj} + \sum_{k \neq j} p_{jk} f_{kj} \qquad \text{für alle } q_j \in Q$$

Berechnung von f_{ij} und h_{ij} II

Beweis für f_{ij}:

Sei $q_i \neq q_j$. Es gilt

$$\begin{array}{rcll} \Pr[T_{ij} < \infty \mid X_1 = q_k] & = & \Pr[T_{kj} < \infty] & \text{für } \; q_k \neq q_j \\ \Pr[T_{ij} < \infty \mid X_1 = q_j] & = & 1 & \end{array}$$

und damit

$$\begin{aligned} f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] &= \sum_{q_k \in Q} \Pr[T_{ij} < \infty \mid X_1 = q_k] \cdot p_{ik} \\ &= p_{ij} + \sum_{k \neq j} \Pr[T_{kj} < \infty] \cdot p_{ik} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj} \end{aligned}$$

Die Ableitung für f_j ist analog.

Berechnung von f_{ij} und h_{ij} III

Beweis für h_{ij}:

Sei $q_i \neq q_j$. Es gilt

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = q_k] & = & 1 + \mathbb{E}[T_{kj}] \quad \text{für } q_k \neq q_j \\ \mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = q_j] & = & 1 \end{array}$$

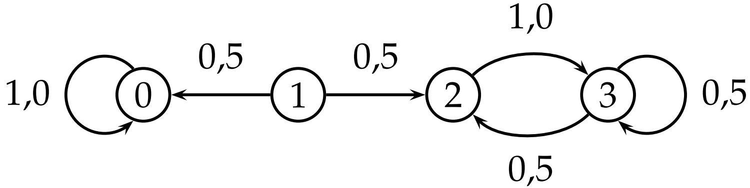
und damit

$$\begin{aligned} h_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}] \; &= \; \sum_{q_k \in Q} \mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = q_k] \cdot p_{ik} \\ &= p_{ij} + \sum_{k \neq j} (1 + \mathbb{E}[T_{kj}]) \cdot p_{ik} = 1 + \sum_{k \neq j} h_{kj} \cdot p_{ik} \end{aligned}$$

Die Ableitung für h_j analog.

Berechnung von f_{ij} und h_{ij} IV

Beispiel 189



Für die Übergangszeiten für die Zustände 2 und 3 erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} h_{23} &= 1 & \qquad h_2 &= 1 + h_{32} \\ h_{32} &= 1 + \tfrac{1}{2}\, h_{32} & \qquad h_3 &= 1 + \tfrac{1}{2}\, h_{23} \end{aligned}$$

mit Lösung

$$h_{23} = 1 \qquad h_{32} = 2 \qquad h_2 = 3 \qquad h_3 = 1.5$$

Berechnung von f_{ij} und h_{ij} V

Beispiel 190 (Zweite Frage von Armand)

Wenn Cécile mich verlässt, wie lange dauert es im Schnitt, bis sie zurückkommt?

Armand interessiert sich für h_{21} für die Kette mit

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} h_{12} &= 1 + p_{11}\, h_{12} = 1 + 0.8\, h_{12} & \qquad h_1 &= 1 + p_{12}\, h_{21} = 1 + 0.2\, h_{21} \\ h_{21} &= 1 + p_{22}\, h_{21} = 1 + 0.9\, h_{21} & \qquad h_2 &= 1 + p_{21}\, h_{12} = 1 + 0.1\, h_{12} \end{aligned}$$

mit Lösung

$$h_{12} = 5 \qquad h_{21} = 10 \qquad h_1 = 3 \qquad h_2 = 1.5$$

Das Gamblers Ruin Problem I

Beispiel 191

Cécile entscheidet, Armand und Bertrand sollen Poker spielen, bis einer von ihnen bankrott ist. Sie zieht dann endgültig beim Gewinner ein.

Armand und Bertrand verfügen jeweils über Kapital a und $m - a$.

In jeder Pokerrunde setzen beide jeweils eine Geldeinheit.

Armand gewinnt jedes Spiel mit W'keit p und Bertrand mit W'keit $q := 1 - p$.

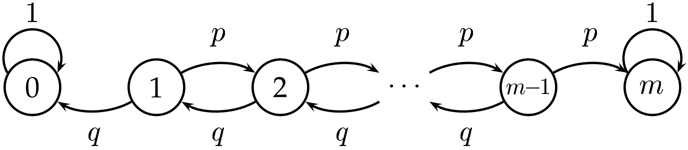
Frage 1: Mit welcher W'keit zieht Cécile bei Armand ein?

Frage 2: Wieviele Runden müssen im Schnitt gespielt werden?

Das Gamblers Ruin Problem II

Frage 1: Mit welcher W'keit zieht Cécile bei Armand ein?

Wir modellieren das Spiel durch die Markov-Kette



Die Zustände modellieren das aktuelle Kapital von Armand.

Die W'keit, mit der Armand Bertrand in den Ruin treibt is $f_{a,m}$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} f_{0,m} &= 0 \\ f_{i,m} &= p \cdot f_{i+1,m} + q \cdot f_{i-1,m} \qquad \text{für } 1 \leq i < m-1 \\ f_{m-1,m} &= p + q \cdot f_{m-2,m} \\ f_{m,m} &= 1 \end{aligned}$$

Das Gamblers Ruin Problem III

Die Gleichungen können umgeschrieben werden zu

$$
\begin{aligned}
f_{0,m} &= 0 \\
f_{1,m} &= \xi \\
f_{i+1,m} &= (1/p) \cdot f_{i,m} - (q/p) \cdot f_{i-1,m} \qquad \text{für } 1 \leq i < m
\end{aligned}
$$

mit ξ so gewählt, dass $f_{m,m} = 1$ erfüllt ist.

Es ergibt sich für $p \neq 1/2$ (Fall $p = 1/2$ analog):

$$
f_{i,m} = \frac{p \cdot \xi}{2p - 1} \cdot \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i\right) \qquad \xi = \frac{2p-1}{p \cdot \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m\right)}
$$

und insgesamt

$$
f_{a,m} = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m}
$$

Das Gamblers Ruin Problem IV

Frage 2: Wieviele Runden müssen im Schnitt gespielt werden?

Wir betrachten die Zufallsvariable

$$U_i := \text{„Anzahl der Schritte von } q_i \text{ nach } q_0 \text{ oder } q_m\text{“}$$

Mit $d_i := \mathbb{E}[U_i]$ gilt

$$\begin{aligned} d_0 &= 0 \\ d_i &= q \cdot d_{i-1} + p \cdot d_{i+1} + 1 \qquad \text{für } 1 \leq i < m \\ d_m &= 0 \end{aligned}$$

Der Speziallfall $p = q = 1/2$ ist besonders einfach:

$$d_i = i \cdot (m - i) \qquad \text{für alle } i = 0, \ldots, m$$

womit unabhängig vom Startzustand das Spiel im Mittel nach höchstens m^2 Schritten beendet ist.

27. Stationäre Verteilung

Stationäre Verteilung I: Motivation

Die Übergangsmatrix der ABC-Kette erfüllt für alle $t \in \mathbb{N}$:

$$P^t = B \cdot D^t \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.7^t & 0 \\ 0 & 1^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Für $t \to \infty$ erhalten wir

$$\lim_{t\to\infty} P^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

und so gilt für eine beliebige Anfangsverteilung $\mathcal{Q}_0 = (a, 1-a)$

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{Q}_t = \lim_{t\to\infty} \mathcal{Q}_0 \cdot P^t = (a, 1-a) \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Stationäre Verteilung II: Motivation

Das System konvergiert also unabhängig von der Anfangsverteilung in die feste Verteilung $\pi = (1/3\,,\,2/3)$.

Intuitive Antwort auf Armands dritte Frage:

> *Die Verteilung der Zeit, die Cécile bei Armand und Bertrand verbringt, konvergiert gegen: 1/3 der Zeit bei Armand, 2/3 bei Bertrand.*

Offene Punkte:

(1) Konvergiert jede Kette in eine feste Verteilung unabhängig von der Anfangsverteilung?

(2) Wenn so, wie kann diese Verteilung berechnet werden?

(3) Stimmt die intuitive Antwort auf Armands dritte Frage? Wie kann die Frage überhaupt formalisiert werden?

Stationäre Verteilung III: Motivation

Wenn eine Kette immer in eine Verteilung π konvergiert, dann muss sie mit π als Anfangsverteilung „in π bleiben'".

Wir erwarten also

$$\pi \cdot P = \pi$$

d.h., π soll Eigenvektor von P zum Eigenwert 1 sein (bezüglich Multiplikation von links).

In der Tat gilt:

$$\pi \cdot P = (1/3,\ 2/3) \cdot \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} = (1/3,\ 2/3) = \pi.$$

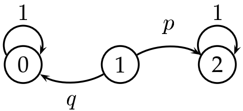
Stationäre Verteilung IV: Definition

Definition 192

Sei P die Übergangsmatrix einer Markov-Kette. Einen Zustandsvektor π mit $\pi = \pi \cdot P$ nennen wir stationäre Verteilung der Markov-Kette.

Umformulierung der Frage (a): Besitzen alle Markov-Ketten die Eigenschaft, dass sie unabhängig von der Anfangsverteilung in eine bestimmte stationäre Verteilung konvergieren?

Nein!



Diese Kette hat unendlich viele zwei stationäre Verteilungen:

$$(a, 0, 1-a) \quad \text{für alle } a \in [0,1]$$

Definition 193

Eine Markov-Kette heißt irreduzibel, wenn es für alle Zustandspaare q_i, q_j eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $(P^n)_{ij} > 0$.

Wir bezeichen $p_{ij}^{(n)} := (P^n)_{ij}$.

Äquivalente Definition: Eine Markov-Kette heißt irreduzibel, wenn ihr Markov-Diagramm stark zusammenhängend ist.

Lemma 194

Für irreduzible endliche Markov-Ketten gilt für alle Zustände $q_i, q_j \in Q$:

(a) $f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] = 1$, *und*

(b) *der Erwartungswert $h_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}]$ existiert.*

Stationäre Verteilung VI: Irreduzible Ketten

Beweis:

Zu (b): Sei $q_k \in Q$ beliebig. Es gibt n_k mit $p_{kj}^{(n_k)} > 0$.

Sei $n := \max_k\{n_k\}$ und $p := \min_k\{p_{kj}^{(n_k)}\}$.

Wir unterteilen die Zeit in Phasen zu n Schritten.

Wir nennen eine Phase erfolgreich, wenn während dieser Phase ein Besuch bei q_j stattfindet.

Die Anzahl von Phasen bis zur ersten erfolgreichen Phase können wir durch eine geometrische Verteilung mit Parameter p abschätzen.

Die erwartete Anzahl von Phasen ist somit höchstens $1/p$.

Es folgt $h_{ij} \leq (1/p)\, n$ und $f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] = 1$. $\square$

Stationäre Verteilung VII: Irreduzible Ketten

Satz 195

Eine irreduzible endliche Markov-Kette besitzt eine eindeutige stationäre Verteilung π *und es gilt* $\pi(q_j) = 1/h_j$ *für alle* $q_j \in Q$.

Beweis:

(a) Z.z.: Es gibt einen Vektor $\pi \neq 0$ mit $\pi = \pi \cdot P$.

Sei $e := (1, \ldots, 1)^T$ und sei I die Einheitsmatrix.

Es gilt $P\,e = e$. (Einträge einer Zeile von P addieren sich zu 1).

Daraus folgt $0 = P\,e - e = (P - I)e$. Damit ist die Matrix $P - I$ singulär.

Es gibt also $\pi \neq 0$ mit $(P^T - I) \cdot \pi = 0$.

Stationäre Verteilung VIII: Irreduzible Ketten

(b) Z.z.: Wenn $\pi = \pi \cdot P$ für $\pi \neq 0$, dann $\pi(q_j) = 1/h_j$ für alle $q_j \in Q$.

Wir betrachten zwei Fälle:

Fall 1. $\sum_{q_i \in Q} \pi(q_i) \neq 0$.

O.B.d.A. sei $\sum_{q_i \in Q} \pi(q_i) = 1$.

Für jeden Zustand $q_j \in Q$ gilt (Lemma 194 und 188)

$$
\begin{aligned}
\pi(q_i) h_{ij} &= \pi(q_i) \left(1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} h_{kj} \right) \quad \text{für } q_i \neq q_j \\
\pi(q_j) h_j &= \pi(q_j) \left(1 + \sum_{k \neq j} p_{jk} h_{kj} \right)
\end{aligned}
$$

Stationäre Verteilung IX: Irreduzible Ketten

Addition der Gleichungen ergibt

$$\pi(q_j)h_j + \sum_{q_i \neq q_j} \pi(q_i)h_{ij} = \sum_{q_i \in Q} \pi(q_i) + \sum_{q_i \in Q} \sum_{q_k \neq q_j} \pi(q_i)p_{ik}h_{kj}$$

Mit $\sum_{q_i \in Q} \pi(q_i) = 1$ folgt

$$\begin{aligned}
\pi(q_j)h_j + \sum_{q_i \neq q_j} \pi(q_i)h_{ij} &= 1 + \sum_{q_i \in Q} \sum_{q_k \neq q_j} \pi(q_i)p_{ik}h_{kj} \\
&= 1 + \sum_{q_k \neq q_j} h_{kj} \sum_{q_i \in Q} \pi(q_i)p_{ik} \\
&= 1 + \sum_{q_k \neq q_j} h_{kj}\pi(q_k)
\end{aligned}$$

und so $\pi(q_j)h_j = 1$.

Stationäre Verteilung X: Irreduzible Ketten

Fall 2. $\sum_{q_i \in Q} \pi(q_i) = 0$.

Dieselbe Rechnung ergibt nun

$$\begin{aligned} \pi(q_j)h_j + \sum_{q_i \neq q_j} \pi(q_i)h_{ij} &= 0 + \sum_{q_i \in Q} \sum_{q_k \neq q_j} \pi(q_i)p_{ik}h_{kj} \\ &= \sum_{q_k \neq q_j} h_{kj}\pi(q_k) \end{aligned}$$

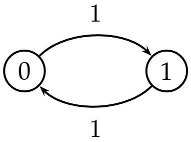
Es folgt $\pi(q_j) = 0$ für alle $q_j \in Q$, im Widerspruch zu $\pi \neq 0$.

Dieser Fall ist also eigentlich nicht möglich.

Stationäre Verteilung XI: Aperiodische Ketten

Auch wenn eine Markov-Kette eine eindeutige stationäre Verteilung besitzt, so muss sie nicht für jede Anfangsverteilung in diese Verteilung konvergieren.

Beispiel:



Als Anfangsverteilung nehmen wir $\pi_0 = (1,0)$ an. Es gilt:

$$\pi_t = \begin{cases} (1,0) & \text{falls } t \text{ gerade,} \\ (0,1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Kette pendelt also zwischen den beiden Vektoren $(1,0)$ und $(0,1)$ hin und her.

Die eindeutige stationäre Verteilung ist $(1/2, 1/2)$.

Stationäre Verteilung XII: Aperiodische Ketten

Definition 196

Die Periode eines Zustands q_j ist die größte Zahl $\xi \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid p_{jj}^{(n)} > 0\} \subseteq \{i \cdot \xi \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

Ein Zustand mit Periode $\xi = 1$ heißt aperiodisch.

Eine Markov-Kette ist aperiodisch, wenn alle Zustände aperiodisch sind.

Stationäre Verteilung XIII: Aperiodische Ketten

Lemma 197

Ein Zustand $q_i \in Q$ ist genau dann aperiodisch, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $p_{ii}^{(n)} > 0$ für alle $n \geq n_0$.

Beweis:

($\Rightarrow$) Aus $p_{ii}^{(n_0)} > 0$ und $p_{ii}^{(n_0+1)} > 0$ folgt $\xi = 1$.

($\Leftarrow$) Wenn q_i aperiodisch ist, dann gibt es teilerfremde $a, b \in \mathbb{N}$ mit $p_{ii}^{(a)} > 0$ und $p_{ii}^{(b)} > 0$.

Ein bekannter Fakt der elementaren Zahlentheorie besagt: Da $a, b \in \mathbb{N}$ teilerfremd gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ es nichtnegative Zahlen $x, y \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $n = xa + yb$.

Es folgt $p_{ii}^{(n)} > 0$ für alle $n \geq n_0$ und wir sind fertig.

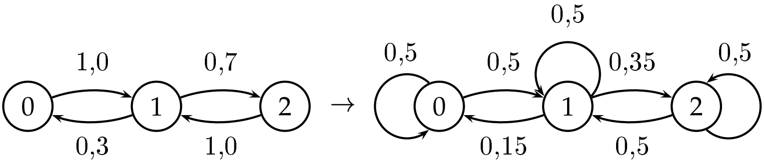
Stationäre Verteilung XIV: Aperiodische Ketten

$p_{ii}^{(n)} > 0$ gilt genau dann, wenn das Markov-Diagramm einen Pfad von q_i nach q_i der Länge n hat.

Es folgt: Wenn q_i eine Schleife hat (d.h. $p_{ii} > 0$ gilt), dann ist q_i aperiodisch.

Damit kann eine Kette folgendermaßen durch eine aperiodische Kette „simuliert“ werden:

- Füge an jedem Zustand eine Schleife an mit W'keit $1/2$.
- Halbiere die W'keiten an allen übrigen Kanten.



Bei irreduziblen Ketten genügt es, eine einzige Schleife einzuführen.

Stationäre Verteilung XV: Ergodische Ketten

Definition 198

Irreduzible, aperiodische Markov-Ketten nennt man ergodisch.

Satz 199 (Fundamentalsatz für ergodische Markov-Ketten)

Für jede ergodische endliche Markov-Kette $M = (Q, T, \delta, \mathcal{Q}_0)$ *gilt*

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{Q}_n = \pi,$$

wobei π *die eindeutige stationäre Verteilung von* M *bezeichnet.*

Bemerkung: π ist unabhängig von der Anfangsverteilung!

Stationäre Verteilung XVI: Ergodische Ketten

Beweis:

(Skizze.) Wir zeigen, dass für beliebige q_i, q_k gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)} = \pi_k.$$

Daraus folgt die Behauptung, da

$$\mathcal{Q}_n(q_k) = \sum_{q_i \in Q} \mathcal{Q}_0(q_i) \cdot p_{ik}^{(n)} \to \pi(q_k) \cdot \sum_{q_i \in Q} \mathcal{Q}_0(q_i) = \pi(q_k).$$

Wir betrachten das „Produkt“ zweier Kopien der Kette mit Zuständen (q_i, q_j) und Übergangsw'keiten

$$\delta((q_i, q_j), (q_{i'}, q_{j'})) = p_{ii'} \cdot p_{jj'}$$

Diese Produktkette ist ebenfalls ergodisch.

Stationäre Verteilung XVII: Ergodische Ketten

Sei H die Zufallsvariable, die die kleinste Zeit angibt, an die sich die Kette in einen Zustand der Gestalt (q, q) befindet.

Aus Lemma 194 und der Endlichkeit der Markov-Kette folgt

$$\Pr[H < \infty] = 1 \qquad \text{und} \qquad \mathbb{E}[H] < \infty$$

unabhängig von der Anfangsverteilung.

Seien X_t, Y_t Zufallsvariablen, die den Zustand der ersten bzw. der zweiten Komponente angeben.

Für ein festes t gilt $\Pr[X_t = q \mid t \geq H] = \Pr[Y_t = q \mid t \geq H]$ und somit auch

$$\Pr[X_t = q, t \geq H] = \Pr[Y_t = q, t \geq H].$$

Stationäre Verteilung XVIII: Ergodische Ketten

Wir wählen ein $q_i \in Q$ und setzen für die Anfangsverteilung $\mathcal{Q}_0$ der Produktkette

$$\mathcal{Q}_0(q, q') = \begin{cases} \pi(q') & \text{wenn } q = q_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Intuition: die erste Komponente startet im Zustand q_i, die zweite startet (und bleibt) in der stationären Verteilung π.

Wir erhalten für alle $q_k \in Q$ und $n \geq 1$

$$\begin{aligned} |p_{ik}^{(n)} - \pi(q_k)| &= |\Pr[X_n = q_k] - \Pr[Y_n = q_k]| \\ &= |\Pr[X_n = q_k, n \geq H] + \Pr[X_n = q_k, n < H] \\ &\quad - \Pr[Y_n = q_k, n \geq H] - \Pr[Y_n = q_k, n < H]| \end{aligned}$$

Stationäre Verteilung XIX: Ergodische Ketten

Mit $\Pr[X_t = q, t \geq H] = \Pr[Y_t = q, t \geq H]$ gilt

$$|p_{ik}^{(n)} - \pi(q_k)| = |\Pr[X_n = q_k, n < H] - \Pr[Y_n = q_k, n < H]|$$

und wegen $|\Pr[A \cap B] - \Pr[A \cap C]| \leq \Pr[A]$ folgt

$$|p_{ik}^{(n)} - \pi(q_k)| \leq \Pr[n < H]$$

Da $\Pr[H < \infty] = 1$, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \Pr[n < H] = 0$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)} = \pi(q_k)$$

für alle $q_i, q_k \in Q$.

Stationäre Verteilung XX: Ergodische Ketten

Sei $q \in Q$ und $k \geq 0$. Seien X_q^k und B_q die Zufallsvariablen mit

$$X_q^k(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma(k) = q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$B_q(\sigma) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{X_q^0 + \cdots + X_q^n}{n} & \text{wenn der Grenzwert existiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz 200 (Ergodischer Satz (ohne Beweis))

Für jeden Zustand q einer ergodischen endlichen Kette mit stationärer Verteilung π gilt

$$\Pr[B_q = \pi(q)] = 1 \,.$$

Stationäre Verteilung XXI: Ergodische Ketten

Beispiel 201 (Armands dritte Frage)

Wenn unsere ménàge a trois für immer so weiter geht, wieviel Prozent der Tage wird Cécile mit mir verbringen?

Armand fragt nach der Verteilung von B_{q_1}.

Der ergodische Satz zeigt, dass B_{q_1} den Wert $1/3$ mit W'keit 1 nimmt.

Cécile wird „auf langer Sicht“ mit W'keit 1 ein drittel der Tage mit Armand verbringen.