

Überblick

① Zwei-Stichproben- t -Test:

Vergleich der unbekannten Erwartungswerten zweier Stichproben mit identischer, unbekannter Varianz.

② χ^2 -Anpassungstest:

Vergleich empirisch bestimmter Verteilung mit vermuteter Verteilung.

③ (Endliche, zeitdiskrete, homogene) Markov-Ketten.

Zwei-Stichproben- t -Test

Erinnerung: A11.4

Vermessen von Bergen mit demselben Messgerät.

- Berg X hat Höhe μ_X .
- Berg Y hat Höhe μ_Y .

Messgerät produziert Messfehler, wodurch gemessene Höhen variieren.

- Messfehler unabhängig von einander.
- Jeder Messfehler ist $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ verteilt mit $\sigma = 15$.

Messergebnisse:

$$X_1, \dots, X_m \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2).$$

$$Y_1, \dots, Y_n \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2).$$

Entscheide $\mu_X \stackrel{?}{=} \mu_Y$ anhand von Stichproben x_1, \dots, x_m und y_1, \dots, y_n .

Problem: Varianz $\sigma^2 = 225$ wird als bekannt vorausgesetzt.

Im Allgemeinen kann σ jedoch auch nur experimentell bestimmt werden.

Zwei-Stichproben- t -Test

Falls σ bekannt:

$$T_0 := \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma \sqrt{m^{-1} + n^{-1}}}.$$

Unter für $H_0: \mu_X = \mu_Y$ gilt $T_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Falls σ unbekannt, schätze σ^2 mittels

$$T_1 := (m - 1)S_X^2 + (n - 1)S_Y^2.$$

Verallgemeinerung von A11.5:

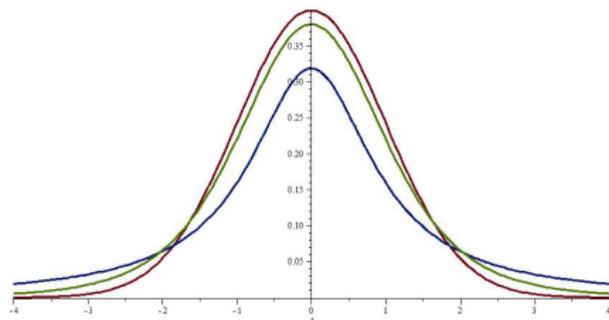
T_1/σ^2 ist χ_{m+n-2}^2 -verteilt und unabhängig von T_0 .

Testgröße: (σ s kürzen sich)

$$T := \sqrt{m+n-2} \frac{T_0}{\sqrt{T_1/\sigma^2}} = \sqrt{\frac{m+n-2}{m^{-1} + n^{-1}}} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}}.$$

Unter $H_0: \mu_X = \mu_Y$ ist T dann (per Definition) t_{m+n-2} -verteilt.

Zwei-Stichproben- t -Test



Blau: t_1 , Grün: t_5 , Rot: $\phi_{0,1}$.

Für $k \leq 30$ ist Verteilung t_k tabelliert.

Für $k > 30$ kann t_k mittels Standardnormalverteilung approximiert werden.

Lehne $H_0: \mu_X = \mu_Y$ **ab**, falls T zu stark von 0 abweicht.

Fehlerw'keit 1. Art:

$$\Pr_{H_0}[|T| > c] = 1 - \Pr_{H_0}[|T| \leq c] = 1 - (F_{t_{m+n-2}}(c) - F_{t_{m+n-2}}(-c)) \stackrel{!}{=} \alpha.$$

Es gilt $F_{t_{m+n-2}}(-c) = 1 - F_{t_{m+n-2}}(c)$ wegen Symmetrie:

$$\text{D.h.: } c = F_{t_{m+n-2}}^{-1}(1 - \alpha/2) =: t_{m+n-2, 1-\alpha/2}.$$

Zwei-Stichproben- t -Test: Definition

Annahmen:

$X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ unabhängig, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$, $Y_j \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$ mit σ^2 unbekannt.

Testgröße:

$$T := \sqrt{\frac{m+n-2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}}.$$

Hypothesen und Ablehnungskriterien für H_0 bei Signifikanzniveau α :

H_0	H_1	
$\mu_X = \mu_Y$	$\mu_X \neq \mu_Y$	$ T > t_{m+n-2, 1-\alpha/2}$
$\mu_X \geq \mu_Y$	$\mu_X < \mu_Y$	$T < t_{m+n-2, \alpha}$
$\mu_X \leq \mu_Y$	$\mu_X > \mu_Y$	$T < t_{m+n-2, 1-\alpha}$

χ^2 -Anpassungstest

Vererbungsexperiment nach Mendel:

Erbsen mit Merkmalen:

- A : Samen sind "rund" (dominant) vs. a : Samen sind "kantig" (rezessiv).
- B : Schoten sind "gelb" (dominant) vs. b : Schoten sind "grün" (rezessiv).

Theorie: Merkmale werden unabhängig weitervererbt (verschiedene Chromosome).

Experiment: Betrachte Nachkommen von Pflanzen nur mit Genotyp $AaBb$.

Nullhypothese: Nach Theorie sollten alle Genotypen $\{A, a\}^2\{B, b\}^2$ gleichwahrscheinlich sein:

Genotyp	gelb	grün
rund	$\{AA, Aa, aA\}\{BB, Bb, bB\}$	$\{AA, Aa, aA\}\{bb\}$
kantig	$\{aa\}\{BB, bB, Bb\}$	$\{aa\}\{bb\}$

D.h.:

$\Pr_{H_0}[\cdot]$	gelb	grün
rund	9/16	3/16
kantig	3/16	1/16

χ^2 -Anpassungstest

Vererbungsexperiment nach Mendel:

Experiment liefert relative Häufigkeiten (empirische Verteilung):

	gelb	grün
rund	$\frac{315}{556} \approx 0,557$	$\frac{108}{556} \approx 0,194$
kantig	$\frac{101}{556} \approx 0,182$	$\frac{32}{556} \approx 0,058$

Frage: Widerspricht Experimentergebnis der Theorie?

Kann die **Nullhypothese**

$\Pr_{H_0}[\cdot]$	gelb	grün
rund	9/16	3/16
kantig	3/16	1/16

zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$ abgelehnt werden?

χ^2 -Anpassungstest

Experiment besteht aus $n = 556$ unabhängigen, identischen Einzelexperimenten X_1, \dots, X_n .

Wertebereich: $W = \{\text{gelb, grün}\} \times \{\text{rund, kantig}\} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.

Nullhypothese: $H_0: \Pr[X_i = w_j] = p_j$ für alle $j \in [k]$.

Für $p_1 = 9/16, p_2 = 3/16, p_3 = 3/16, p_4 = 1/16$.

Häufigkeit von Phänotyp w_j : $N_j := |\{i \in [n] \mid X_i = w_j\}|$.

Pearson: Gilt die Nullhypothese, so konvergiert die Verteilung von

$$T := \sum_{j=1}^k \frac{(N_j - np_j)^2}{np_j}.$$

gegen die χ^2 -Verteilung mit $k - 1$ Freiheitsgraden für $n \rightarrow \infty$.

Vgl. **De Moivre:** $\frac{N_j - np_j}{\sqrt{np_j(1-p_j)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1)$.

Fehlerw'keit 1. Art: Lehne H_0 ab, falls T zu groß.

Pearson: $\Pr_{H_0}[T > c] \approx 1 - F_{\chi_{k-1}^2}(c)$, d.h. $c = F_{\chi_{k-1}^2}^{-1}(1 - \alpha) =: \chi_{k-1, 1-\alpha}^2$.

χ^2 -Anpassungstest: Definition

Annahmen: X_1, \dots, X_n unabhängig, identisch verteilt mit diskretem Wertebereich $W = \{w_1, \dots, w_k\}$.

$N_j := |\{i \in [n] \mid X_i = w_j\}|$ gibt die Häufigkeit von Wert w_j an.

Nullhypothese: $H_0: \forall j \in [k]: \Pr[X_i = w_j] = p_j$.

Alternative: $H_1: \exists j \in [k]: \Pr[X_i = w_j] \neq p_j$.

Testgröße:

$$T = \sum_{j=1}^k \frac{(N_j - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j}.$$

Ablehnen von H_0 zum Signifikanzniveau α , falls $T > \chi_{k-1, 1-\alpha}^2$

Nebenbedingungen damit Approximation von T mit χ_{k-1}^2 gerechtfertigt:

- 1 $N_j p_j \geq 1$ für alle $j \in [k]$.
- 2 $N_j p_j \geq 5$ für 80% aller $j \in [k]$.

χ^2 -Anpassungstest

Im **Beispiel**:

Verteilung empirisch bzw. unter H_0 :

empirisch	gelb	grün	H_0	gelb	grün
rund	$\frac{315}{556}$	$\frac{108}{556}$	rund	9/16	3/16
kantig	$\frac{101}{556}$	$\frac{32}{556}$	kantig	3/16	1/16

Für T ergibt sich ≈ 0.470 .

Für das Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$ folgt: $\chi_{3,0.9}^2 \approx 6.25 > 0.470$.

Somit kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.

Das Experimentergebnis **widerspricht somit nicht** der Theorie (zum gewählten Signifikanzniveau).

Die Nullhypothese könnte nur für eine Fehlerw'keit 1. Art von mindestens $F_{\chi_3^2}(0.470) \approx 0.9254$ abgelehnt werden.

Markov-Ketten: Einführung

Dienen zur Beschreibung und Analyse von **probabilistischen Systemen**

Zustände (states) des Systems: S

Für uns (fast) immer $|S| < \infty$.

In jedem Zeitschritt:

Wechsle mit **Übergangsw'keit** $p_{s,t}$ von $s \in S$ nach $t \in S$.

Für uns: Diskrete Zeit \mathbb{N}_0 ; Übergangsw'keiten konstant über Zeit.

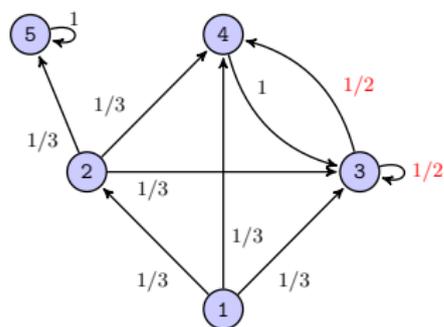
Übergangsmatrix: $P = (p_{s,t})_{s,t \in S}$

Forderung: $\sum_{t \in S} p_{s,t} = 1$ für jedes $s \in S$ ("Massenerhaltung").

Visualisierung: **Übergangsgraph** ("Markov-Diagramm")

Zeichne Kante (s,t) mit Beschriftung $p_{s,t}$, falls $p_{s,t} > 0$.

Markov-Ketten: Random-Surfer-Model (A1.4)



Zustände entsprechen Websites:

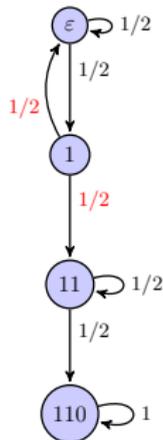
$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Kanten entsprechend Links zwischen Websites.

Übergangsw'keiten: Gleichverteilung über verlinkte Websites.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Markov-Ketten: Warten auf 110 (A4.4)



Zustände entsprechen Präfixen von 110:

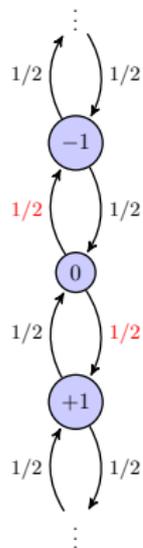
$$S = \{\epsilon, 1, 11, 110\}.$$

Kanten entsprechend Transitionen des zugehörigen DFAs.

Übergangsw'keiten: W'keiten, dass Münzwurf 0 bzw. 1 liefert.

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Markov-Ketten: Springen (A6.2) (1d Irrfahrt)



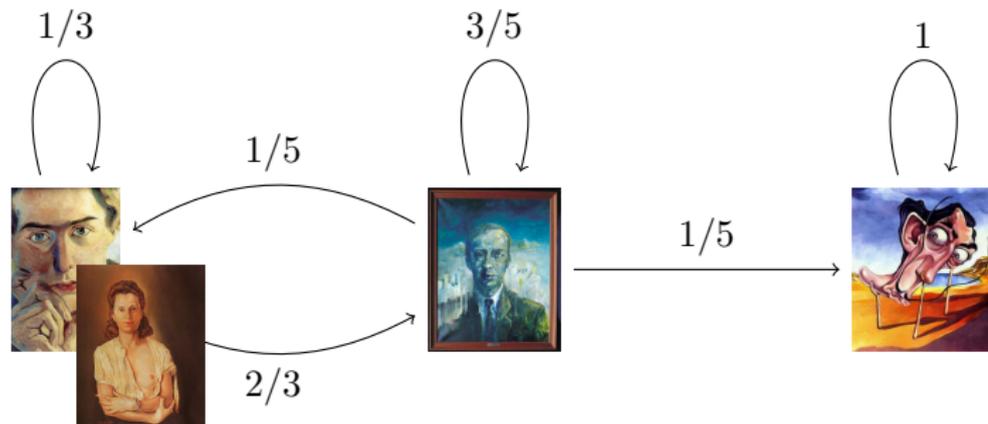
Zustände entsprechen möglichen Positionen: $S = \mathbb{Z}$.

Kanten entsprechen möglichen Sprüngen.

Übergangsw'keiten:

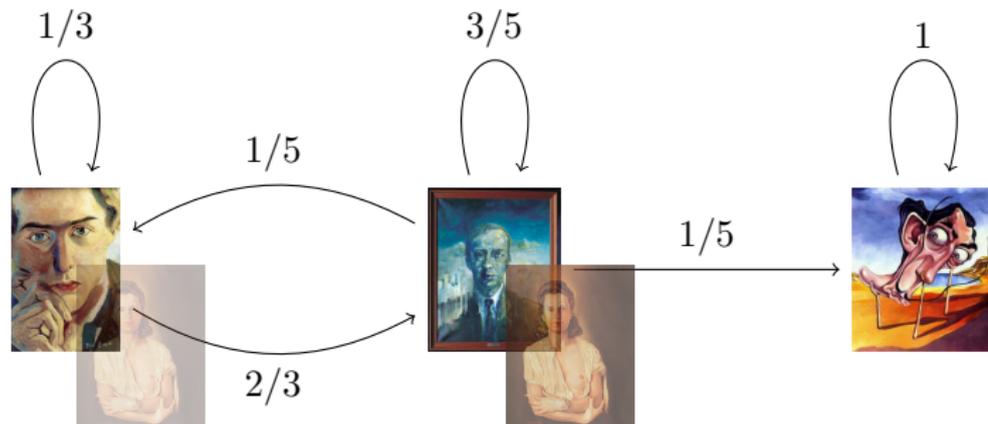
$$P = \begin{pmatrix} \vdots & & & & & & & & & \\ \dots & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \dots & \\ \vdots & & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

Von Chef verordnetes Beispiel



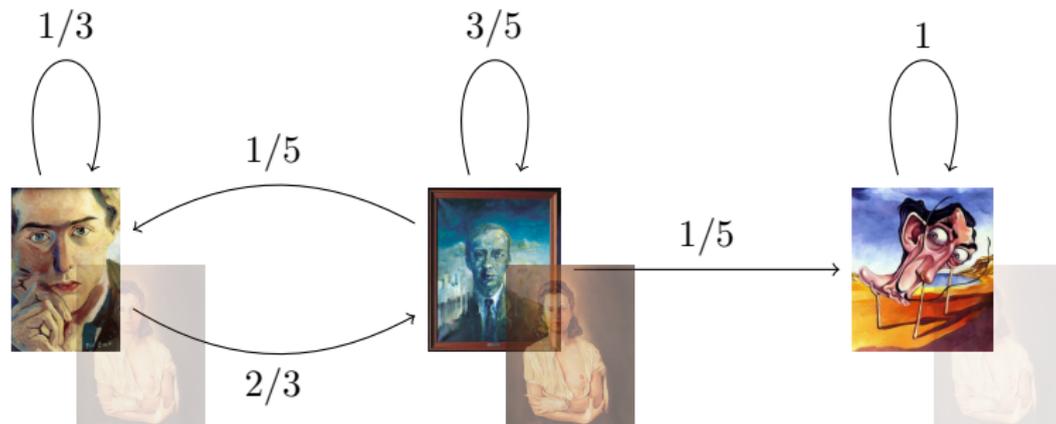
Gala Éluard Dalí, Max Ernst, Paul Éluard, Salvador Dalí

Von Chef verordnetes Beispiel



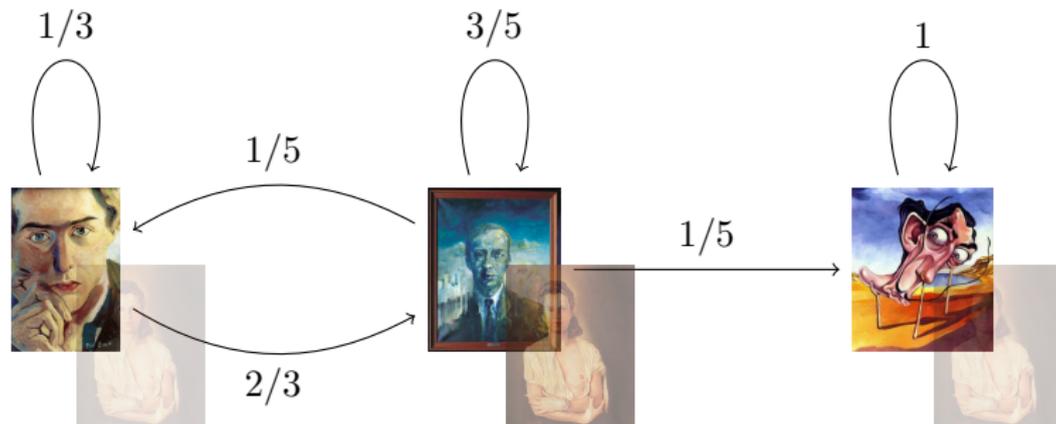
Gala Éluard Dalí, Max Ernst, Paul Éluard, Salvador Dalí

Von Chef verordnetes Beispiel



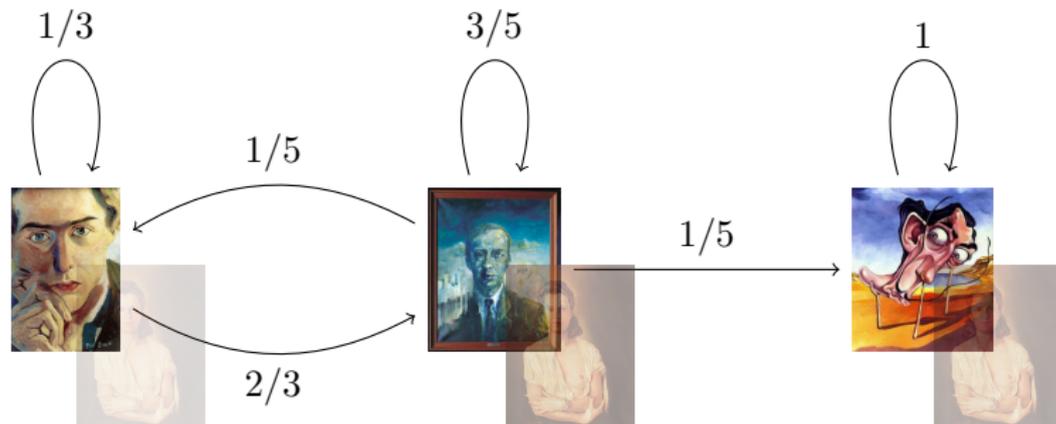
Gala Éluard Dalí, Max Ernst, Paul Éluard, Salvador Dalí

Von Chef verordnetes Beispiel



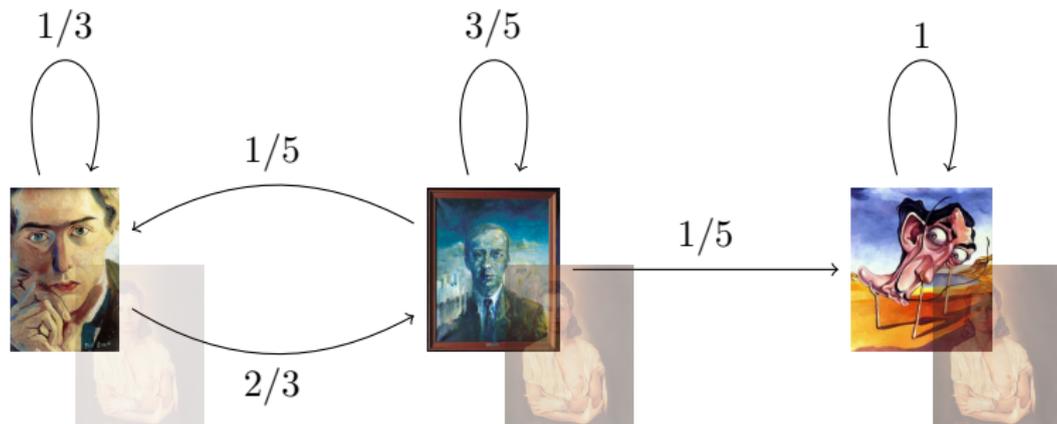
Gala Éluard Dalí, Max Ernst, Paul Éluard, Salvador Dalí

Von Chef verordnetes Beispiel



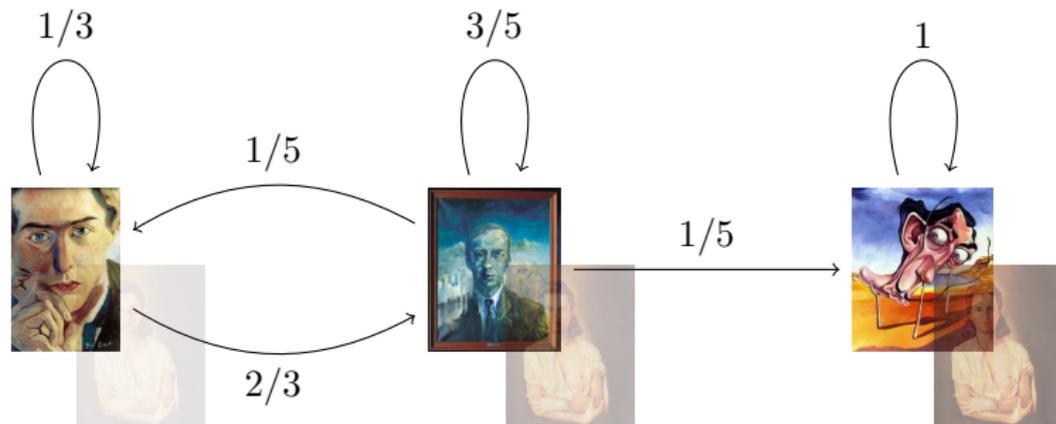
Gala Éluard Dalí, Max Ernst, Paul Éluard, Salvador Dalí

Von Chef verordnetes Beispiel



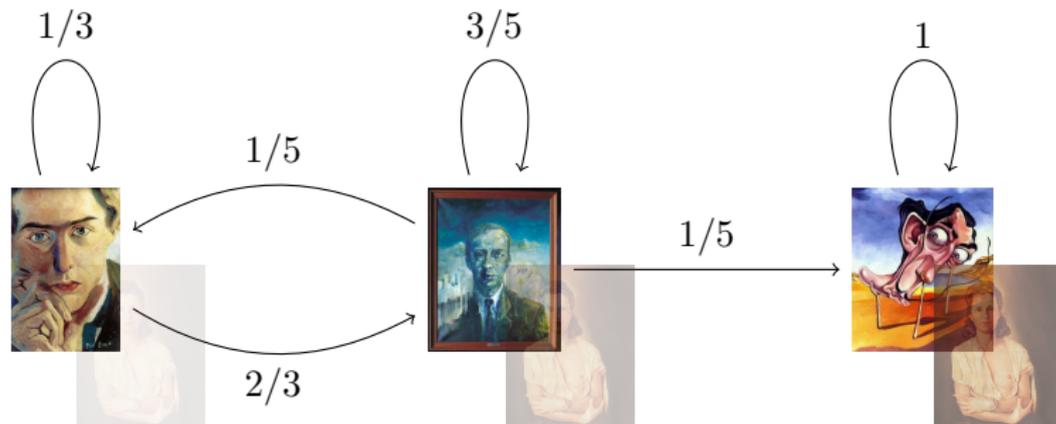
Gala Éluard Dalí, Max Ernst, Paul Éluard, Salvador Dalí

Von Chef verordnetes Beispiel



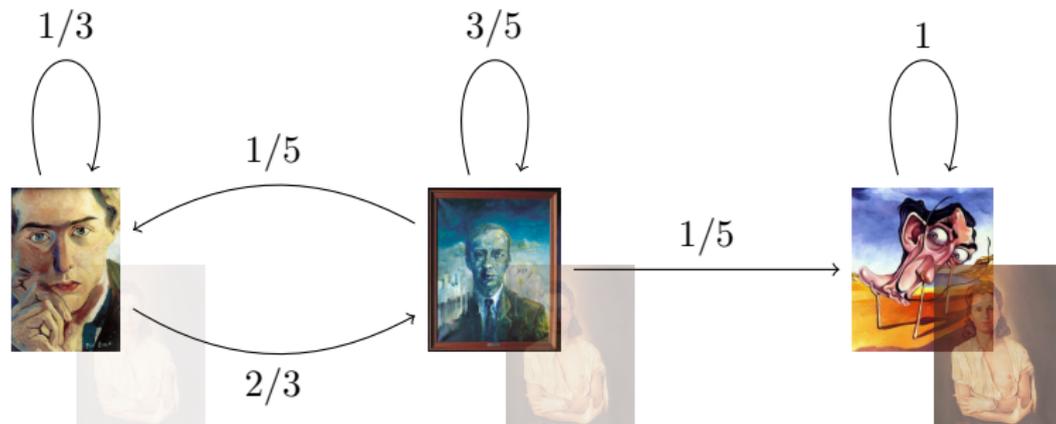
Gala Éluard Dalí, Max Ernst, Paul Éluard, Salvador Dalí

Von Chef verordnetes Beispiel



Gala Éluard Dalí, Max Ernst, Paul Éluard, Salvador Dalí

Von Chef verordnetes Beispiel



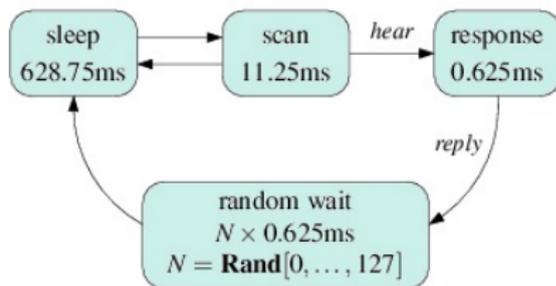
Gala Éluar Dalí, Max Ernst, Paul Éluar, Salvador Dalí

Markov-Ketten: PRISM

Homepage: <http://www.prismmodelchecker.org/>.

Softwaretool zur automatischen Analyse von probabilistischen Systemen:
Algorithmen, Protokolle

Beispiel: Bluetooth Device Discovery:



Slave scant verschiedene Frequenzen, um Master zu finden.

Zur Vermeidung von Kollisionen mit anderen Slaves, Sleep-Phasen zufälliger Länge.

Laufzeitanalyse: Worst-Case, Best-Case, Average-Case, etc.

Master-Slave-System kann als Markov-Diagramm mit $\geq 10^9$ Zuständen beschrieben werden.

Markov-Ketten: Einführung

Gegeben: Zustandsmenge S und (konstante) Übergangsw'keiten $p_{s,t}$.

Interessiert an dem zeitlichen Verhalten des System.

Ergebnismenge Ω gerade die Menge aller **unendlichen Zustandsfolgen**:

$$\Omega = S^\omega = \{(s_0, s_1, s_2, \dots) \mid \forall i \in \mathbb{N}_0: s_i \in S\}.$$

Beachte: Ω ist überabzählbar für $|S| > 1$.

Verwende daher kleinste σ -Algebra (S^ω, \mathcal{F}) mit **relevanten** Ereignissen

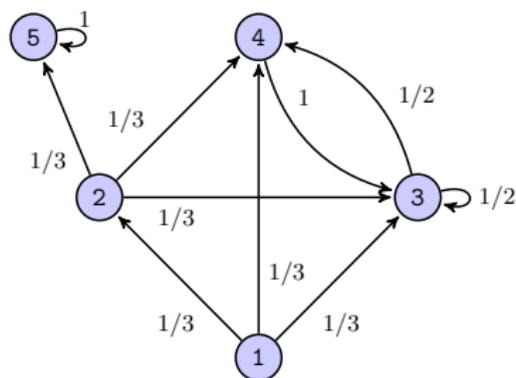
“**Zum Zeitpunkt n ist das System im Zustand s** ”

Zugeordnete ZV: X_n bezeichnet den Zustand zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$.

Wertebereich von X_n ist gerade S mit:

$$[X_n = s] := S^n \{s\} S^\omega = \{(s_0, s_1, s_2, \dots) \in S^\omega \mid s_n = s\}.$$

Markov-Ketten: Einführung



Beispiele:

Irgendwann auf Website 3:

$$\bigcup_{n \geq 0} [X_n = 3] = \{(s_0, s_1, s_2, \dots) \in S^\omega \mid \exists n \in \mathbb{N}_0: s_n = 3\}.$$

Immer wieder (unendlich oft) auf Website 4:

$$\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} [X_k = 4] = \{(s_0, s_1, s_2, \dots) \in S^\omega \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 \exists k \geq n: s_k = 4\}.$$

Verteilung von X_n ? Hängt von **Startverteilung** $\alpha = (\alpha_s)_{s \in S}$ ab.

Markov-Ketten: Einführung

Gegeben: Startverteilung $\alpha = (\alpha_s)_{s \in S}$

mit $\sum_{s \in S} \alpha_s = 1$ und $\alpha_s \geq 0$ für alle $s \in S$.

W'keitsmaß bzgl. α für endlichen Präfix $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n)$:

$$\Pr_\alpha[X_0 = s_0, X_1 = s_1, \dots, X_{n-1} = s_{n-1}, X_n = s_n] := \alpha_{s_0} \cdot p_{s_0, s_1} \cdots p_{s_{n-1}, s_n}$$

Damit **Verteilung von X_n** : Summe über alle $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, t)$.

$$\Pr_\alpha[X_n = t] = \sum_{s_0, \dots, s_{n-1} \in S} \Pr_\alpha[X_0 = s_0, \dots, X_{n-1} = s_{n-1}, X_n = t]$$

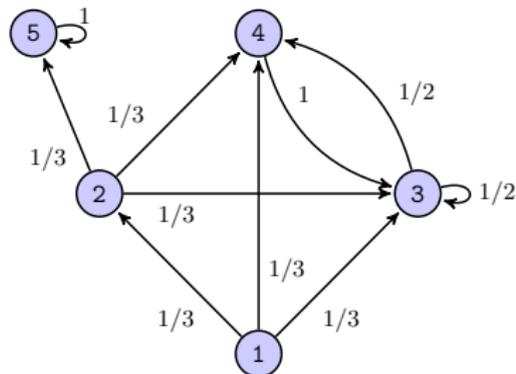
oder kurz (siehe A1.4):

$$\left(\Pr_\alpha[X_n = t] \right)_{t \in S} = \left(\Pr_\alpha[X_{n-1} = t] \right)_{t \in S} \cdot P = \alpha \cdot P^n.$$

Berechnung von P^n : Falls möglich, diagonalisiere $P = T \cdot \text{diag}(\lambda_s) \cdot T^{-1}$.

Dann: $P^n = T \cdot \text{diag}(\lambda_s^n) \cdot T^{-1}$. (Siehe auch A1.4(f) und A2.3(b).)

Markov-Ketten: Einführung



Übergangsmatrix P für ganzen Graph nicht diagonalisierbar.

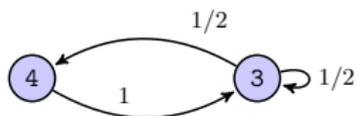
(Ausweg: Jordansche Normalform, siehe Lösung zu A1.4.)

Übergangsmatrix \hat{P} für SCC $\{3, 4\}$ diagonalisierbar:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

(SCC: maximal strongly connected subgraph.)

Markov-Ketten: Einführung



Mit Diagonalisierung folgt:

$$\hat{P}^n = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Für Startverteilung $\hat{\alpha} = (p, 1 - p)$ auf $\{3, 4\}$:

$$\hat{\alpha} \cdot \hat{P}^n = \frac{2}{3} \cdot \left(1 - 2^{-n}\left(1 - \frac{3}{2}p\right) \quad \frac{1}{2} + 2^{-n}\left(1 - \frac{3}{2}p\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right)$$

(Vgl. A2.3(b).)

Markov-Ketten: Definition

Als **Markov-Kette** werden gerade die ZVen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bezeichnet.

Definition:

Eine Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von ZV mit **gemeinsamen** Wertebereich S ist eine **endliche, zeithomogene Markov-Kette mit diskreter Zeit**, falls:

- S **endlich** ist,
- die Übergangsw'keiten $p_{s,t}$ unabhängig von der Zeit sind (**zeithomogen**),
- die Zeitschritte diskret sind (**diskrete Zeit**) und
- die **Markov**-Bedingung gilt:

$$\Pr_\alpha[X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n, \dots, X_0 = s_0] \stackrel{!}{=} \Pr_\alpha[X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n],$$

soweit $\Pr_\alpha[X_n = s_n, \dots, X_0 = s_0] > 0$.

“Speichere nur aktuelle Position, aber nicht, wie man dorthin gekommen ist.”
(wie bei endlichen Automaten)

Irrfahrt im \mathbb{Z}^d : abzählbare zeithomogene Markov-Kette mit diskreter Zeit.

Markov-Ketten: Typische Fragestellungen

Langzeitverhalten und **Stationäre Verteilung**: (nächste Woche)

Wie verhält sich die Markov-Kette für $n \rightarrow \infty$ in Abhängigkeit von α ?

$$\alpha \cdot P^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ?.$$

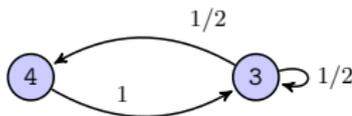
Existiert “Gleichgewicht” (**stationäre Verteilung**) π mit $\pi \cdot P = \pi$?

$$\text{D.h.: } \Pr_{\pi}[X_0 = t] = \dots = \Pr_{\pi}[X_n = t] = \Pr_{\pi}[X_{n+1} = t] = \dots$$

Ist π eindeutig/unabhängig von α ?

Für welche Startverteilungen α strebt Markov-Kette zum Gleichgewicht?

Beispiel:



$$\hat{\alpha} \cdot \hat{P}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Markov-Ketten: Typische Fragestellungen

Zeitschritte von s nach t unter der Bedingung, dass wir in s starten?

Rückkehrzeit: $T_s := \min\{n \geq 1 \mid X_n = s\} \mid [X_0 = s]$.

Übergangszeit: $T_{s,t} := \min\{n \geq 0 \mid X_n = t\} \mid [X_0 = s]$

Beachte $\Pr[T_{s,s} = 0] = 1$ (langweilig).

Vereinlichung: $\tau_{s,t} := \min\{n \geq 1: X_n = t\} \mid [X_0 = s]$.

Damit: $\tau_{s,s} = T_s$ für $s \neq t$ und $\tau_{s,t} = T_{s,t}$.

(Wieder-/Ersteintrittszeit)

Wertebereich: $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$.

Falls t nie erreicht wird bzw. s nie wieder erreicht wird:

$T_{s,t} = \tau_{s,t} = \min \emptyset = \infty$, bzw. $T_s = \tau_{s,s} = \min \emptyset = \infty$.

Beachte: $T_s, T_{s,t}, \tau_{s,t}$ sind bedingte ZV, bedingen Startverteilung mit $\Pr_\alpha[X_0 = s] = 1$. Z.B.:

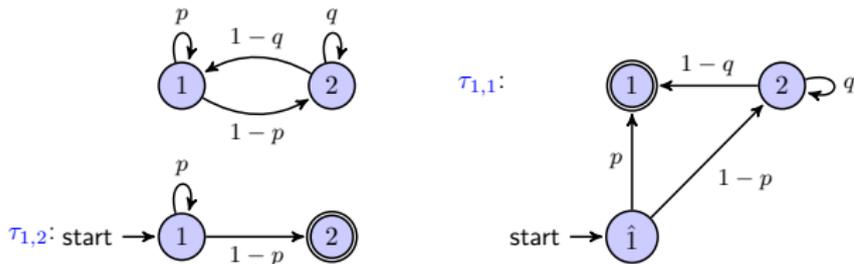
$$\Pr[\tau_{s,t} = k] = \Pr[\min\{n \geq 1: X_n = t\} \mid X_0 = s].$$

Markov-Ketten: Übergangs-/Rückkehrzeiten

Veranschaulichung von $\tau_{s,t}$:

- 1 Falls $s = t$, füge neuen Zustand \hat{s} ein mit $p_{\hat{s},s'} = p_{s,s'}$ für alle $s' \in S$. Betrachte dann $\tau_{\hat{s},t}$.
- 2 Entferne alle ausgehenden Kanten von t .
- 3 $\Pr[\tau_{s,t} = k]$ ist dann die Summe aller Pfade der Länge k von s nach t .

Beispiel:



Markov-Ketten: Übergangs-/Rückkehrzeiten

Bestimme **Verteilung von $\tau_{s,t}$ auf \mathbb{N}_0** mittels erzeugender Funktionen.

$$G_{s,t}(z) := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} z^k \cdot \Pr[\tau_{s,t} = k].$$

Partitionieren der Abläufe (mit $X_0 = s$) nach $X_1 = s'$:

Falls $s' = t$, nach einem Schritt fertig:

$$\Pr[\tau_{s,t} = k \mid X_1 = t] = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls $s' \neq t$, Ersteintritt in t ausgehend von s' in $k - 1$ Schritten:

$$\Pr[\tau_{s,t} = k \mid X_1 = s' (\neq t)] = \begin{cases} \Pr[\tau_{s',t} = k - 1] & \text{für } k > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mittels Satz der totalen W'keit folgt:

$$G_{s,t}(z) = z \cdot p_{s,t} + z \cdot \sum_{s' \neq t} G_{s',t}(z) \cdot p_{s,s'}$$

Markov-Ketten: Übergangs-/Rückkehrzeiten

Aus $G_{s,t}(z) = z \cdot p_{s,t} + z \cdot \sum_{s' \neq t} G_{s',t}(z) \cdot p_{s,s'}$

folgt mit $\Pr[\tau_{s,t} < \infty] = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \Pr[\tau_{s,t} = n] = G_{s,t}(1)$

$$\Pr[\tau_{s,t} < \infty] = p_{s,t} + \sum_{s' \neq t} \Pr[\tau_{s',t} < \infty] \cdot p_{s,s'}$$

und für $\Pr[\tau_{s,t} < \infty] = 1$ mit $\mathbb{E}[\tau_{s,t}] = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} n \cdot \Pr[\tau_{s,t} = n] = G'_{s,t}(1)$:

$$\mathbb{E}[\tau_{s,t}] = 1 + \sum_{s' \neq t} \mathbb{E}[\tau_{s',t}] \cdot p_{s,s'}$$

Markov-Ketten: Übergangs-/Rückkehrzeiten

Aus $G_{s,t}(z) = z \cdot p_{s,t} + z \cdot \sum_{s' \neq t} G_{s',t}(z) \cdot p_{s,s'}$

folgt mit $\Pr[\tau_{s,t} < \infty] = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \Pr[\tau_{s,t} = n] = G_{s,t}(1)$

$$\Pr[\tau_{s,t} < \infty] = p_{s,t} + \sum_{s' \neq t} \Pr[\tau_{s',t} < \infty] \cdot p_{s,s'}$$

Ankunftsw'keit: $f_{s,t} := \Pr[T_{s,t} < \infty] = \Pr[\tau_{s,t} < \infty]$ für $s \neq t$.

Rückkehrw'keit: $f_s := \Pr[T_s < \infty] = \Pr[\tau_{s,s} < \infty]$.

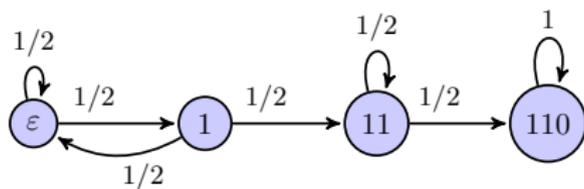
und für $\Pr[\tau_{s,t} < \infty] = 1$ mit $\mathbb{E}[\tau_{s,t}] = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} n \cdot \Pr[\tau_{s,t} = n] = G'_{s,t}(1)$:

$$\mathbb{E}[\tau_{s,t}] = 1 + \sum_{s' \neq t} \mathbb{E}[\tau_{s',t}] \cdot p_{s,s'}$$

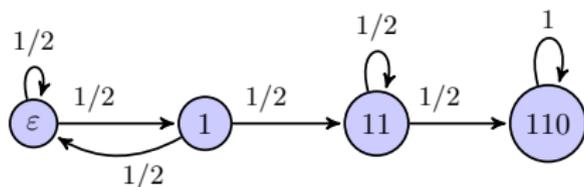
erwartete **Übergangszeit:** $h_{s,t} := \mathbb{E}[T_{s,t}] = \mathbb{E}[\tau_{s,t}]$ für $s \neq t$.

erwartete **Rückkehrzeit:** $h_s := \mathbb{E}[T_s] = \mathbb{E}[\tau_{s,s}]$.

Markov-Ketten: Übergangs-/Rückkehrzeiten



Markov-Ketten: Übergangs-/Rückkehrzeiten



Übergangszeit $T_{\varepsilon,110} = \tau_{\varepsilon,110}$:

$$G_{\varepsilon,110}(z) = \frac{1}{2}zG_{\varepsilon,110}(z) + \frac{1}{2}zG_{1,110}(z)$$

$$G_{1,110}(z) = \frac{1}{2}zG_{\varepsilon,110}(z) + \frac{1}{2}zG_{11,110}(z)$$

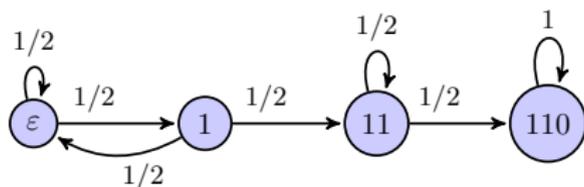
$$G_{11,110}(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}zG_{11,110}(z)$$

Somit (vgl. A4.4(a)):

$$G_{\varepsilon,110}(z) = \frac{z^3}{(4-2z-z^2)(2-z)}, \quad \Pr[\tau_{\varepsilon,110} < \infty] = 1, \quad \mathbb{E}[\tau_{\varepsilon,110}] = 8$$

$$G_{1,110}(z) = \frac{z^4}{2(4-2z-z^2)(2-z)} + \frac{z^2}{4-2z}, \quad \Pr[\tau_{1,110} < \infty] = 1, \quad \mathbb{E}[\tau_{1,110}] = 6$$

Markov-Ketten: Übergangs-/Rückkehrzeiten



Rückkehrzeit: $T_\epsilon = \tau_{\epsilon, \epsilon}$:

$$G_{\epsilon, \epsilon}(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}zG_{1, \epsilon}(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2$$

$$G_{1, \epsilon}(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}zG_{11, \epsilon}(z) = \frac{1}{2}z$$

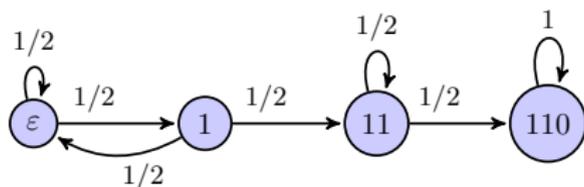
$$G_{11, \epsilon}(z) = \frac{1}{2}zG_{11, \epsilon}(z) + \frac{1}{2}zG_{110, \epsilon}(z) = 0$$

$$G_{110, \epsilon}(z) = \frac{1}{2}zG_{110, \epsilon}(z) = 0$$

Somit: $f_\epsilon = \Pr[\tau_{\epsilon, 110} < \infty] = 3/4$.

Mit positiver W 'keit, wird SCC $\{\epsilon, 1\}$ irgendwann verlassen.

Markov-Ketten: Übergangs-/Rückkehrzeiten



Rückkehrzeit: $T_{11} = \tau_{11,11}$:

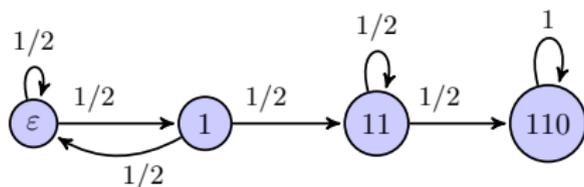
$$G_{11,11}(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}zG_{110,11}(z) = \frac{1}{2}z$$

$$G_{110,11}(z) = \frac{1}{2}zG_{110,11}(z) = 0$$

Somit: $f_{11} = \Pr[\tau_{11,11} < \infty] = 1/2$.

Mit positiver W'keit, wird SCC $\{11\}$ irgendwann verlassen.

Markov-Ketten: Übergangs-/Rückkehrzeiten



Rückkehrzeit: $T_{110} = \tau_{110,110}$:

$$G_{110,110}(z) = z$$

Somit: $f_{110} = \Pr[\tau_{110,110} < \infty] = 1$, $h_{110} = \mathbb{E}[\tau_{110,110}] = 1$.

Markov-Ketten: Rückkehrzeiten und Erreichbarkeit

Klassifikation nach Erreichbarkeit:

- s **kommuniziert** mit t , falls $\exists n \geq 0: (P^n)_{s,t} > 0$.

M.a.W.: t ist von s aus im Übergangsgraphen erreichbar.

- Eine Markov-Kette ist **irreduzibel**, falls alle Zustände miteinander kommunizieren, d.h., falls $\forall s, t \in S \exists n \geq 0: (P^n)_{s,t} > 0$.

M.a.W.: Der Übergangsgraph ist stark zusammenhängend (bildet eine SCC).

Klassifikation von Zuständen mittels Rückkehrzeit:

Zustand s ist

- **transient**, falls $\Pr[\tau_{i,i} < \infty] < 1$.
- **positiv-rekurrent**, falls $\Pr[\tau_{i,i} < \infty] = 1$ und $\mathbb{E}[\tau_{i,i}] < \infty$.
- **null-rekurrent**, falls $\Pr[\tau_{i,i} < \infty] = 1$ und $\mathbb{E}[\tau_{i,i}] = \infty$.

Markov-Ketten: Rückkehrzeiten und Erreichbarkeit

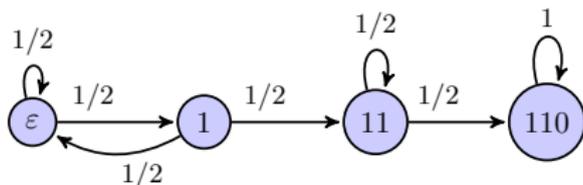
Zusammenhang von Rückkehrzeiten und Erreichbarkeit (ohne Beweis):

- 1 Transiente Zustände werden mit W'keit 1 nur endlich oft besucht.
Rekurrenente Zustände werden mit W'keit 1 unendlich oft besucht.
- 2 Kommunizierende Zustände sind vom selben Typ, d.h., alle Zustände einer SCC sind entweder transient oder positiv-rekurrent oder null-rekurrent.
- 3 In einer **endlichen** SCC sind alle Zustände entweder transient oder positiv-rekurrent (siehe auch Lemma 115).
- 4 In einer **endlichen** Markov-Kette sind die "bottom SCCs" positiv-rekurrent, die restlichen SCCs transient.

Insbesondere gibt es stets mindestens einen positiv-rekurrenten Zustand.

(bottom SCC: SCC, welche nur sich selbst erreichen kann.)

Markov-Ketten: Übergangs-/Rückkehrzeiten



SCCs: $\{\epsilon, 1\}, \{11\}, \{110\}$.

Bottom SCCs: $\{110\}$.

Transient: $\{\epsilon, 1, 11\}$.

Positiv-rekurrent: $\{110\}$.