Technische Universität München **Sommersemester 2009**
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / S. Kiefer / M. Luttenberger

LÖSUNG

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Wiederholungsklausur

***Beachten Sie:* Soweit nicht anders angegeben, sind alle Antworten zu begründen!**

Aufgabe 1 **2P+2P+2P=6P**

(a) Sei $X \sim \text{Geo}(\frac{9}{10})$. Berechnen Sie $\Pr[X > 100]$. Geben Sie als Ergebnis einen Zahlenwert an, keine Summe!

(b) Seien X, Y unabhängig und beide gleichverteilt auf der Menge $\{5, 6\}$. Geben Sie die Dichte von $X - Y$ an. (Keine Begründung verlangt.)

(c) Seien $\Omega = \{x, y, z\}$ und $A = \{x, y\}$ und $B = \{y, z\}$ und $\Pr[A \mid B] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[B \mid A] = \frac{1}{3}$. Berechnen Sie $\Pr[A]$.

Lösungsvorschlag:

(a) Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Bernoulli-Versuche mit Erfolgsw'keit 0.9 bis zum ersten Erfolg. Es gilt $X > 100$ genau dann, wenn die ersten 100 Versuche misslingen, also $\Pr[X > 100] = 0.1^{100} = 10^{-100}$.

(b)

$$\Pr[X - Y = 0] = 1/2 \qquad \Pr[X - Y = 1] = \Pr[X - Y = -1] = 1/4 \qquad \Pr[X - Y = z] = 0 \quad (z \notin \{-1, 0, 1\})$$

(c)

$$\frac{1}{3} = \Pr[B \mid A] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[A]} = \frac{\Pr[y]}{\Pr[x] + \Pr[y]} \Longrightarrow \Pr[x] = 2\Pr[y]$$

$$\frac{1}{2} = \Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[y]}{\Pr[y] + \Pr[z]} \Longrightarrow \Pr[z] = \Pr[y]$$

Es gilt $1 = \Pr[x] + \Pr[y] + \Pr[z] = 2\Pr[y] + \Pr[y] + \Pr[y]$, folglich $\Pr[y] = \frac{1}{4}$ und $\Pr[x] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[A] = \Pr[x] + \Pr[y] = \frac{3}{4}$.

Aufgabe 2 **2P+2P+2P=6P**

Die Übungsleitung entwirft 10 Aufgaben. Für jede Aufgabe gilt, dass sie mit einer W'keit von 0.3 fehlerhaft ist.

(a) Wie groß ist die W'keit, dass mindestens zwei Aufgaben fehlerhaft sind? (Als Ergebnis genügt es, einen Ausdruck anzugeben, den man in einen Taschenrechner eingeben könnte.)

(b) Der Professor möchte die Zahl der fehlerhaften Aufgaben senken. Für jede entworfene Aufgabe gilt, dass der Professor sie mit einer W'keit von 0.2 überprüft. In jeder überprüften Aufgabe werden die Fehler beseitigt. Wieviele Aufgaben sind danach im Schnitt fehlerhaft?

(c) Anders als in (b) wählt der Professor nun zufällig genau 4 Aufgaben zur Überprüfung aus und korrigiert dort die Fehler. Wieviele Aufgaben sind danach im Schnitt fehlerhaft?

Lösungsvorschlag:

(a) Sei X die Zahl der fehlerhaften Aufgaben. Es gilt $X \sim \text{Bin}(10, 0.3)$ und daher

$$\Pr[X \geq 2] = 1 - \Pr[X = 0] - \Pr[X = 1] = 1 - 0.7^{10} - 10 \cdot 0.3 \cdot 0.7^9 .$$

(b) In diesem Szenario ist eine Aufgabe genau dann fehlerhaft, wenn sie am Anfang einen Fehler enthält (W'keit 0.3) und nicht vom Professor überprüft wird (W'keit 0.8). Daher ist die Fehlerw'keit pro Aufgabe jetzt $0.3 \cdot 0.8 = 0.24$. Insgesamt also $10 \cdot 0.24 = 2.4$ fehlerhafte Aufgaben im Schnitt.

(c) Sei X_i die Zufallsvariable, die den Wert 1 annimmt, wenn die i-te Aufgabe nach dem Eingreifen des Professors fehlerhaft ist, und den Wert 0 andernfalls. Die W'keit, dass der Professor die erste Aufgabe zur Überprüfung auswählt, ist 0.4. Ähnlich wie in (b) gilt also:

$$\mathbb{E}X_1 = \Pr[X_1 = 1] = 0.3 \cdot (1 - 0.4) = 0.18 .$$

Für die Zahl der fehlerhaften Aufgaben gilt

$$\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_{10}] = \mathbb{E}X_1 + \cdots + \mathbb{E}X_{10} = 10\mathbb{E}X_1 = 1.8 .$$

Aufgabe 3 **2P+2P+2P+2P=8P**

Der Hersteller Ihres Lieblingsmüslis veranstaltet ein Preisausschreiben:

In jeder Packung Ihres Lieblingsmüslis befindet sich ein Coupon, der eine von n unterschiedlichen Farben trägt. Sie erhalten einen Preis, sobald Sie von jeder Farbe einen Coupon besitzen.

Sie kaufen nur solange Müslipackungen, bis Sie die benötigten Coupons für einen Preis haben. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass Sie hierfür im Erwartungswert $\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i}$ Packungen kaufen müssen.

Unter den n unterschiedlichen Farben seien die Farben Rot und Grün. Sei N_R (N_G) die Zahl der roten (grünen) Coupons, die Sie am Ende erhalten haben.

(a) Berechnen die erwartete Anzahl an roten Coupons, wenn es insgesamt 6 verschiedene Farben gibt, d.h. berechnen Sie $\mathbb{E}[N_R]$ für $n = 6$.

(b) Sei nun $n = 2$, d.h. es gibt nur rote und grüne Coupons.

Berechnen Sie $\Pr[N_R \geq 2]$, d.h. die W'keit, dass Sie am Ende mindestens zwei rote Coupons erhalten haben.

(c) Sei nun $n = 3$, d.h. es gibt nur rote, grüne und (z.B.) blaue Coupons.

Berechnen Sie $\Pr[N_R \geq 2 \vee N_G \geq 2]$, d.h. die W'keit, dass Sie am Ende mindestens zwei rote oder zwei grüne Coupons erhalten haben.

(d) Sei nun $n = 3$. Zeigen Sie:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k \leq \Pr[N_R \geq k] \leq \frac{2}{k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

Lösungsvorschlag:

(a) Sei N_i die Zahl der Coupons von Farbe i am Ende. Offenbar gilt $N = \sum_{i=1}^{n} N_i$ und die N_i sind identisch-verteilt (aber nicht unabhängig). Auf Grund der Linearität des Erwartungswerts gilt dennoch

$$\mathbb{E}N = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} N_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}N_i = n \cdot \mathbb{E}N_1 .$$

Es folgt

$$\mathbb{E}N_1 = \frac{1}{n} \cdot \mathbb{E}N = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} .$$

Mit $n = 6$: $\mathbb{E}[N_R] = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 = \frac{60+30+20+15+12+10}{60} = \frac{147}{60} = 2\frac{27}{60} = 2\frac{9}{20}$.

(b) Man betrachte den entsprechenden Entscheidungsbaum des mehrstufigen Zufallsexperiments. Dann gilt $N_R \geq 2$ genau dann, wenn die ersten beiden Coupons beide rot sind. Es folgt $\Pr[N_R \geq 2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Alternativ: Die gesuchten Elementarereignisse sind von der Form RRR^*G, d.h.,

$$\Pr[N_R \geq 2] = \Pr[RRR^*G] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(c) Es gilt:
$$\Pr[N_R \geq 2 \vee N_G \geq 2] = 1 - \Pr[N_R = 1 \wedge N_G = 1]\,.$$
Für die W'keit $\Pr[N_R = 1 \wedge N_G = 1]$ überlegt man sich, dass es bis auf die Anordnung des roten und des grünen Coupons nur auf die Anzahl der blauen Coupons ankommt (blau = dritte Farbe). Es ergeben sich folgende Fälle:

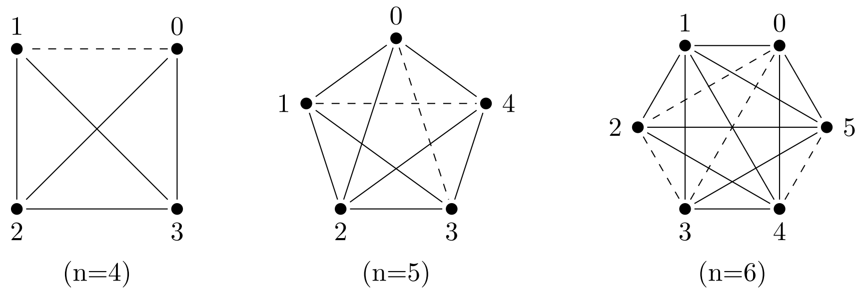
- RGB bzw. GRB mit jeweils W'keit $1/27$.
- RBB^*G bzw. GBB^*R mit jeweils W'keit $1/27 \cdot (\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k}) = 1/18$.
- BB^*RB^*G bzw. BB^*GB^*R mit jeweils W'keit $1/27(\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k})^2 = 1/12$.

Insgesamt:
$$\Pr[N_R = 1 \wedge N_G = 1] = 1/6 + 1/9 + 2/27 = 9/54 + 6/54 + 4/54 = 19/54.$$
Damit:
$$\Pr[N_R \geq 2 \vee N_G \geq 2] = 35/54.$$

(d) Wie in (a) gilt $\mathbb{E}N_R = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} = \frac{11}{6}$. Daraus folgt $\Pr[N_R \geq k] \leq \frac{11}{6 \cdot k} \leq \frac{2}{k}$ mit der Markov-Ungleichung. Für die untere Schranke beobachte man, dass das Ereignis, dass man am Ende mindestens k rote Coupons hat, eine Obermenge des Ereignisses ist, dass die ersten k Coupons alle rot sind. Die W'keit des letzteren Ereignis ist $(1/3)^k$.

Aufgabe 4 **2P+2P+2P+2P=8P**

Wir betrachten einen beliebigen ungerichteten vollständigen Graphen K_n (**mit** $n \geq 4$ **fest**), wobei jede Kante mit W'keit p schwarz, mit W'keit $q := 1 - p$ rot gefärbt ist ($p \in (0,1)$). Die Menge der Knoten sei mit $V = 1, 2, \ldots, n$ bezeichnet.



Beispiele für *Elementarereignisse* im Fall von $n = 4$, $n = 5$ bzw. $n = 6$. Rote Kanten sind gestrichelt dargestellt.

Im Fall von $n = 6$ bildet $\{0, 2, 3\}$ ein rotes Dreieck.

Je drei Knoten definieren ein Dreieck in einem solchen Graphen. Es sei daher
$$\mathcal{D} := \{D \subseteq V \mid |D| = 3\}$$
die Menge der Dreiecke. Ein Dreieck $D \in \mathcal{D}$ ist *rot*, falls jede seiner drei Kanten rot ist. Es sei R_D das Ereignis, dass das Dreieck D rot ist.

(a) Geben Sie $\Pr[R_D]$ an.

(b) Es seien D und D' zwei verschiedene Dreiecke.

Wann sind die Ereignisse R_D und $R_{D'}$ unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie die erwartete Anzahl von roten Dreiecken.

(d) Bestimmen Sie mit Hilfe der Siebformel für $n = 4$ die W'keit, dass es mindestens ein rotes Dreieck gibt.

Hinweis: Für $n = 4$ gibt es $\binom{4}{3} = 4$ mögliche Dreiecke.

Lösungsvorschlag:

(a) $\Pr[R_D] = q^3$.

(b) Die Ereignisse sind genau dann unabhängig, falls die Dreiecke keine gemeinsame Kante besitzen.

Sei $D = \{a, b, c\}$ und $D' = \{e, f, g, \}$. Sind die Kantenmengen disjunkt, so gilt:
$$\Pr[R_D, R_{D'}] = q^6 = \Pr[R_D] \cdot \Pr[R_{D'}]\,.$$

Teilen sich die beiden Dreiecke jedoch $k \in \{1,2\}$ Kanten, so gilt

$$\Pr[R_D, R_{D'}] = q^{6-k} > \Pr[R_D] \cdot \Pr[R_{D'}] .$$

Beachte: Nach Aufgabenstellung gilt $q \in (0,1)$.

(c)

$$\mathbb{E}[\sum_{D \in \mathcal{D}} X_D] = |\mathcal{D}|\mathbb{E}[X_D] = \binom{n}{3}\Pr[R_D] = \binom{n}{3}q^3.$$

(d) Gesucht ist:

$$\Pr\left[\bigcup_{D \in \mathcal{D}} R_D\right].$$

Sei also $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$. Dann folgt mit der Siebformel:

$$\begin{aligned}
& \Pr\left[\bigcup_{i=1}^4 R_{D_i}\right] \\
= \; & \sum_{i=1}^4 \Pr[R_{D_i}] - \sum_{1 \le i < j \le 4} \Pr\left[R_{D_i}, R_{D_j}\right] \\
+ \; & \sum_{1 \le i < j < k \le 4} \Pr\left[R_{D_i}, R_{D_j}, R_{D_k}\right] - \sum_{1 \le i < j < k < l \le 4} \Pr[R_{D_1}, R_{D_2}, R_{D_3}, R_{D_4}] \\
= \; & 4 \cdot q^3 - 6 \cdot q^5 + 4q^6 - q^6 \\
= \; & 4 \cdot q^3 - 6 \cdot q^5 + 3q^6.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass zwei verschiedene Dreiecke sich in mindestens einem Knoten und daher in mindestens zwei Kanten unterscheiden müssen.

Im K_4 gilt daher, dass zwei verschiedene Dreiecke sich in genau einem Knoten und in genau zwei Kanten unterscheiden. Damit also zwei verschiedene Dreiecke im K_4 rot sein können, müssen 5 Kanten rot gefärbt sein, womit sich die W'keit q^5 ergibt.

Im Fall von drei verschiedenen roten Dreiecken müssen bereits alle sechs Kanten des K_4 rot gefärbt sein, da fünf rote Kanten höchstens zwei rote Dreiecke definieren können.

Aufgabe 5 — 2P+2P+2P=6P

Es werden n Personen unabhängig von einander zu einem Thema befragt. Die Befragten sollen sich dabei zwischen zwei Meinungen (Antworten) 0 und 1 entscheiden. Die tatsächliche, aber unbekannte (Meinungs-)Verteilung sei dabei p_0 und $p_1 := 1 - p_0$, d.h., eine beliebige befragte Person vertritt mit W'keit p_0 Meinung 0, mit W'keit p_1 Meinung 1.

Jeder der Befragten verhält sich wie folgt:

- Der Befragte wirft nur für sich einsehbar eine faire Münze.
- Zeigt die Münze Kopf, so antwortet der Befragte wahrheitsgemäß.
- Zeigt die Münze hingegen Zahl, so wählt der Befragte rein zufällig gleichverteilt eine der beiden Antworten, d.h., er antwortet 0 bzw. 1 jeweils mit W'keit 1/2.

Aus der Antwort eines Befragten kann somit nicht auf seine eigentliche Meinung geschlossen werden.

(a) Bestimmen Sie die W'keit $\hat{p}_1$, dass ein Befragter **vorgibt**, Meinung 1 zu vertreten.

(b) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ Bernoulli-verteilte, unabhängige Zufallsvariablen mit $\Pr[X_i = 1] = \hat{p}_1$. (Die X_i entsprechen den Antworten der befragten Personen.)

Bekanntlich ist dann $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\hat{p}_1$.

Zeigen Sie, dass $Y_n = -\frac{1}{2} + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für p_1 ist.

Hinweis: Verwenden Sie (a).

(c) Wie groß muss n (die Anzahl der befragten Personen) sein, damit folgende Bedingung erfüllt ist?

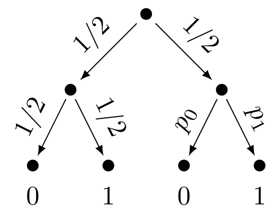
$$\Pr[p_1 - 0.01 \le Y_n \le p_1 + 0.01] \ge 0.99$$

Begründen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\hat{p}_0\hat{p}_1 \le 1/4$ und $\Phi(2.58) \approx 0.995$ gilt.

Lösungsvorschlag:

(a) Man betrachte den Entscheidungsbaum des zu Grunde liegenden mehrstufigen Zufallsexperiments:



Damit folgt:

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot p_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot p_1.$$

Alternativ: Mit Hilfe des Satzes der totalen W'keit:

$$\begin{aligned}
& \hat{p}_1 \\
= \; & \Pr[\text{Antw} = 1] \\
= \; & \Pr[\text{Antw} = 1 | \text{Mein} = 0] \cdot \Pr[\text{Mein} = 0] + \Pr[\text{Antw} = 1 | \text{Mein} = 1] \cdot \Pr[\text{Mein} = 1] \\
= \; & 1/4 \cdot p_0 + 3/4 \cdot p_1 \\
= \; & 1/4 \cdot (1 - p_1) + 3/4 \cdot p_1 = 1/4 + 1/2 \cdot p_1.
\end{aligned}$$

(b) Y_n ist nach Definition genau dann ein erwartungstreuer Schätzer für p_1, falls $\mathbb{E}[Y_n] = p_1$ gilt:

$$\mathbb{E}[Y_n] = -1/2 + 2\mathbb{E}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = -1/2 + 2\hat{p}_1.$$

Nach (a) gilt $1/4 + 1/2 p_1 = \hat{p}_1$, also $p_1 = 2\hat{p}_1 - 1/2$, womit $\mathbb{E}[Y_n] = p_1$ folgt.

(c) Es gilt $\mathbb{E}[Y_n] = p_1$ und

$$\text{Var}[Y_n] = \text{Var}[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\text{Var}[X_i] = \frac{4}{n}\text{Var}[X_1] = \frac{4}{n}\hat{p}_0\hat{p}_1.$$

Approximieren der gesuchten W'keit mit Hilfe des ZGWS:

$$\begin{aligned}
\Pr[p_1 - 0.01 \le Y_n \le p_1 + 0.01] &= \Pr\left[-\frac{0.01\sqrt{n}}{2\sqrt{\hat{p}_0\hat{p}_1}} \le \frac{Y_n - \mathbb{E}[Y_n]}{\sqrt{\text{Var}[Y_n]}} \le \frac{0.01\sqrt{n}}{2\sqrt{\hat{p}_0\hat{p}_1}}\right] \\
&\approx \Phi(\frac{0.01\sqrt{n}}{2\sqrt{\hat{p}_0\hat{p}_1}}) - \Phi(-\frac{0.01\sqrt{n}}{2\sqrt{\hat{p}_0\hat{p}_1}}) \\
&= 2\Phi(\frac{0.01\sqrt{n}}{2\sqrt{\hat{p}_0\hat{p}_1}}) - 1.
\end{aligned}$$

Dies führt auf

$$2\Phi(\frac{0.01\sqrt{n}}{2\sqrt{\hat{p}_0\hat{p}_1}}) - 1 \ge 0.99$$

bzw.

$$\frac{0.01\sqrt{n}}{2\sqrt{\hat{p}_0\hat{p}_1}} \ge z_{0.995}$$

bzw.

$$n \ge 40000 z_{0.995}^2 \hat{p}_0\hat{p}_1.$$

Eine sichere untere Schranke ist bei unbekanntem $\hat{p}_0, \hat{p}_1$ daher:

$$n \ge 10000 z_{0.995}^2 \approx 66564.$$

Aufgabe 6 **2P+2P+2P=6P**

Die Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig. Beide besitzen die Dichte

$$f(t) := \begin{cases} c \cdot (1 - \cos(\pi t)) & \text{falls } t \in [0, 2) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass es sich bei f tatsächlich um eine Dichte handelt.

Geben Sie auch die zugehörige Verteilungsfunktion $F(t)$ in geschlossener Form an.

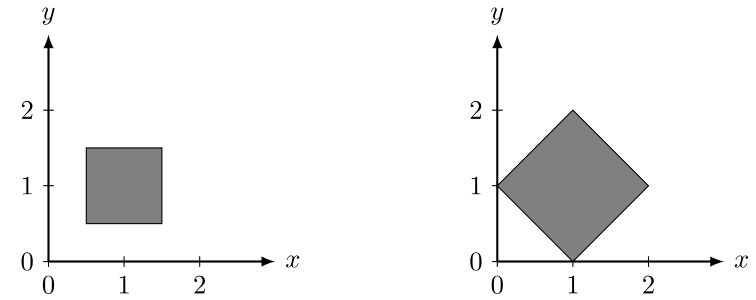
(b) Bestimmen Sie die W'keit, dass der Punkt (X, Y) in dem Quadrat mit Eckpunkten $(0.5, 0.5), (1.5, 0.5), (1.5, 1.5), (0.5, 1.5)$ liegt. (Siehe Abbildung.)

(c) Bestimmen Sie die W'keit, dass der Punkt (X, Y) in dem Quadrat mit den Eckpunkten $(1, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 1)$ liegt. (Siehe Abbildung.)

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass

$$\int_0^1 f(t)F(1-t)dt = \frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2}.$$

zu Teil (b): zu Teil (c):



Grau eingefärbt ist jeweils der Bereich, in welchem der Punkt liegen soll.

Lösungsvorschlag:

(a) Für $x \in [0, 2]$:

$$\begin{aligned} c \cdot \int_0^x (1 - \cos(\pi t))dt &= xc - c\int_0^x \cos(\pi t)dt \\ &= xc - c\tfrac{1}{\pi}\int_0^{\pi x} \cos(t)dt \qquad (\pi t \to t, dt \to \tfrac{1}{\pi}dt) \\ &= xc - c\tfrac{1}{\pi}[\sin(t)]_{t=0}^{\pi x} \\ &= xc - c\tfrac{1}{\pi}\sin(\pi x). \end{aligned}$$

Mit $x = 2$ folgt $2c \overset{!}{=} 1$, also $c = 1/2$. Damit:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\pi}\sin(\pi x) & \text{falls } x \in [0, 2] \\ 1 & \text{falls } x > 2. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned} \Pr\left[(X, Y) \in [1/2, 3/2]^2\right] &= \Pr[X \in [1/2, 3/2], Y \in [1/2, 3/2]] \\ &\overset{X,Y \text{unab.}}{=} \Pr[X \in [1/2, 3/2]]^2 \\ &= (F(3/2) - F(1/2))^2 \\ &= (3/4 - \tfrac{1}{2\pi}\sin(\tfrac{3\pi}{2}) - 1/4 + \tfrac{1}{2\pi}\sin(\tfrac{\pi}{2}))^2 \\ &= (1/2 + \tfrac{1}{\pi})^2 \\ &\approx 0.67. \end{aligned}$$

(c) Sei Q das beschriebene Quadrat. Unter der Beachtung der Spiegelsymmetrie von f bzgl. $t = 1$ gilt dann:

$$\Pr[(X, Y) \in Q] = 1 - \Pr[(X, Y) \notin Q] = 1 - 4 \cdot \Pr[X + Y \leq 1].$$

Wir berechnen $\Pr[X + Y \leq 1]$. Da X, Y unabhängig, ist ihre gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x, y)$ durch $f(x) \cdot f(y)$ gegeben. Es folgt:

$$\begin{aligned} \Pr[X + Y \leq 1] &= \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x+y\leq 1\}} f_{X,Y}(x, y)d(x, y) \\ &= \int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\leq 1-y\}} f(x)f(y)dxdy \\ &= \int_{y=-\infty}^{\infty} f(y)\int_{x=-\infty}^{1-y} f(x)dx \\ &= \int_{y=-\infty}^{\infty} f(y)F(1-y)dy \end{aligned}$$

Mit dem Hinweis folgt daher:

$$\Pr[(X, Y) \in Q] = 1 - 1/2 + \frac{4}{\pi^2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}.$$