Technische Universität München
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / S. Kiefer / M. Luttenberger

Sommersemester 2009

LÖSUNG

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Midterm

***Beachten Sie:* Soweit nicht anders angegeben, sind alle Antworten zu begründen!**

Aufgabe 1

3P + 3P

Sie nehmen an einer Spielshow teil.

(a) Der Moderator würfelt verdeckt mit einem 6-seitigen Würfel. Statt Ihnen seine erzielte Augenzahl genau zu nennen, sagt er Ihnen nur die Augenzahl modulo 3.

Beispiel: Sowohl bei einer „3“ als auch bei einer „6“ nennt der Moderator Ihnen nur die Zahl „0“.

Sie haben zwei Möglichkeiten: *raten* oder *würfeln*.

- *Raten* bedeutet: Sie raten die vom Moderator gewürfelte Augenzahl. Wenn Sie korrekt raten, gewinnen Sie.
- *Würfeln* bedeutet: Sie würfeln selbst. Sie gewinnen, falls Sie die vom Moderator tatsächlich gewürfelte Augenzahl übertreffen.

Der Moderator nennt Ihnen die Zahl „0“. Mit welcher der beiden Möglichkeiten gewinnen Sie mit der höheren W'keit? Bestimmen Sie auch für die beiden anderen Fälle die Möglichkeit mit der höheren Gewinnw'keit.

(b) Der Moderator würfelt verdeckt mit einem roten und einem grünen 3-seitigen Würfel, der jeweils „1“, „2“ oder „3“ mit W'keit 1/3 zeigt. Er sagt Ihnen nur die größere der beiden gewürfelten Augenzahlen. Nehmen Sie an, er sagt Ihnen „3“.

i) Was ist die bedingte W'keit, dass der rote Würfel eine „3“ zeigt?
Hinweis: Geben Sie zunächst einen geeigneten W'keitsraum an.

ii) Was ist die bedingte W'keit, dass beide Würfel eine „3“ zeigen?

Lösungsvorschlag:

(a) Die Erfolgsw'keit beim Raten ist in jedem Fall $\frac{1}{2}$.
Wenn der Moderator 1 sagt, hat er mit W'keit $\frac{1}{2}$ eine 1 gewürfelt und mit W'keit $\frac{1}{2}$ eine 4. Folglich ist dann die W'keit, eine höhere Augenzahl zu werfen, $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{7}{12}$.
Wenn der Moderator 2 sagt, beträgt die entsprechende W'keit $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.
Wenn der Moderator 0 sagt, beträgt die entsprechende W'keit $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{6} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
Folglich sollte man würfeln, wenn der Moderator 1 sagt, und raten, wenn er 2 oder 0 sagt.

(b) i) $\Omega = \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ mit $\Pr[\omega] = \frac{1}{9}$ für alle $\omega \in \Omega$ und $\omega = (\text{rot}, \text{grün})$:

$$\Pr[\text{„Roter Würfel zeigt 3“} \mid \text{„Moderator sagt 3“}] = \frac{\Pr[\{(3,3),(3,2),(3,1)\}]}{\Pr[\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1)\}]} = \frac{3}{5}$$

ii)

$$\Pr[\text{„Beide Würfel zeigen 3“} \mid \text{„Moderator sagt 3“}] = \frac{\Pr[\{(3,3)\}]}{\Pr[\{(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1)\}]} = \frac{1}{5}$$

Aufgabe 2 **2P + 1P + 3P**

(a) Seien R und V Ereignisse mit $0 < \Pr[V] < 1$.
Zeigen Sie:

$$\Pr\left[\overline{R} \mid \overline{V}\right] = 1 - \frac{\Pr[R] - \Pr[V] \cdot \Pr[R \mid V]}{1 - \Pr[V]}$$

Hinweis: $\overline{R} = \Omega \setminus R$ und $\overline{V} = \Omega \setminus V$.

(b) In London ist an jedem Tag die Regenwahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{2}$. Die Wettervorhersage ist zu $\frac{2}{3}$ korrekt, d.h., wenn Regen vorhergesagt wird, regnet es mit W'keit $\frac{2}{3}$, und wenn kein Regen vorhergesagt wird, bleibt es mit W'keit $\frac{2}{3}$ trocken. Benutzen Sie (a), um zu zeigen, dass mit W'keit $\frac{1}{2}$ Regen vorhergesagt wird.

(c) Sie leben in London und müssen jeden Morgen entscheiden, ob Sie einen Schirm mitnehmen. Dabei orientieren Sie sich ausschließlich an der Wettervorhersage. Wenn Regen vorhergesagt wird, nehmen Sie einen Schirm mit; wenn kein Regen vorhergesagt wird, nehmen Sie mit W'keit $\frac{1}{3}$ einen Schirm mit. Angenommen, es regnet. Wie groß ist die W'keit, dass Sie einen Schirm mitgenommen haben?

Lösungsvorschlag:

(a)

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\overline{R} \mid \overline{V}\right] &= 1 - \Pr\left[R \mid \overline{V}\right] = 1 - \frac{\Pr\left[R \cap \overline{V}\right]}{\Pr\left[\overline{V}\right]} \\
&= 1 - \frac{\Pr[R] - \Pr[R \cap V]}{1 - \Pr[V]} \\
&= 1 - \frac{\Pr[R] - \Pr[V] \cdot \Pr[R \mid V]}{1 - \Pr[V]}
\end{aligned}$$

(b) $R =$ „Regen“
$V =$ „Regen wird vorhergesagt“
$\Pr[R] = \frac{1}{2}$, $\Pr[R \mid V] = \frac{2}{3} = \Pr\left[\overline{R} \mid \overline{V}\right]$
Dann folgt mit (a):

$$\begin{aligned}
& & \frac{2}{3} &= 1 - \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \Pr[V]}{1 - \Pr[V]} \\
&\iff & \frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \Pr[V]}{1 - \Pr[V]} &= \frac{1}{3} \\
&\iff & \frac{3}{2} - 2\Pr[V] &= 1 - \Pr[V] \\
&\iff & \Pr[V] &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(c) $S =$ „Schirm mitnehmen“
$\Pr[S \mid V] = \Pr[S \mid V, R] = 1$, $\Pr\left[S \mid \overline{V}\right] = \Pr\left[S \mid \overline{V}, R\right] = \frac{1}{3}$
Es folgt:

$$\begin{aligned}
\Pr[S \mid R] = \frac{\Pr[S \cap R]}{\Pr[R]} &= \frac{\Pr[V \cap S \cap R] + \Pr\left[\overline{V} \cap S \cap R\right]}{\Pr[R]} \\
&= \frac{\Pr[V] \cdot \Pr[R \mid V] \cdot \overbrace{\Pr[S \mid V, R]}^{\Pr[S|V]} + \Pr\left[\overline{V}\right] \cdot \Pr\left[R \mid \overline{V}\right] \cdot \overbrace{\Pr\left[S \mid \overline{V}, R\right]}^{\Pr[S|\overline{V}]}}{\Pr[R]} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{9}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **2P + 2P + 2P**

Sie müssen eine mündliche Prüfung bei Professor Evilsparza ablegen.

(a) Zu Beginn der Prüfung stellt Professor E. Sie vor die Wahl: Entweder Sie bearbeiten einen Fragebogen bestehend aus 10 Fragen, wobei jede korrekte Antwort einen Punkt gibt; oder Sie bearbeiten einen Fragebogen mit 15 Fragen, wobei jede richtige Antwort 2/3 Punkte gibt. Falsche Antworten geben in beiden Fällen 0 Punkte.

Bei welchem der beiden Fragebögen bekommen Sie mit der höheren W'keit mindestens zwei Punkte, wenn Sie unabhängig vom Fragenbogen bei jeder Frage mit W'keit 2/5 die korrekte Antwort geben?

(b) Im nächsten Teil der mündlichen Prüfung werden drei Themengebiete A, B und C behandelt.

Zu jedem der drei Fragegebiete stellt Professor E. solange Fragen, bis Sie eine Frage das erste Mal richtig beantworten. Er beginnt dabei mit Themengebiet A, wechselt dann nach der ersten korrekten Antwort zu B und schließlich zu C.

Nehmen Sie an, dass Ihre Chance auf eine korrekte Antwort bei einer beliebigen Frage stets 3/4 beträgt.

i) Wie viele Fragen stellt der Professor Ihnen im Mittel, bis Sie diesen Teil der Prüfung überstanden haben? Wie hoch ist die Varianz der Anzahl der gestellten Fragen?

ii) Professor E. lässt Sie diesen Teil der Prüfung nur bestehen, falls Sie insgesamt weniger als 6 Fragen benötigen. Mit welcher W'keit bestehen Sie diesen Teil der Prüfung?

(c) Von Studenten aus höheren Semestern wissen Sie, dass Professor E. sehr darauf achtet, dass an einem Prüfungstag im Mittel 4 Studenten bestehen. Sie kennen nicht die genaue Zahl der Studenten, die mit Ihnen am selben Tag Prüfung bei Professor E. haben; Sie wissen jedoch, dass es viele sind.

Approximieren Sie mit Hilfe der Poisson-Verteilung die W'keit, dass mehr als 2 Studenten an diesem Tag die Prüfung bestehen.

Hinweis: Geben Sie zu jeder Aufgabe zunächst eine Zufallsvariable mit geeigneter Verteilung an, die die beschriebene Fragestellung modelliert.

Lösungsvorschlag:

(a) $X \sim \text{Bin}(10; 0.4)$, $Y \sim \text{Bin}(15; 0.4)$ richtig beantwortete Fragen. Punkte X bzw. $2/3 \cdot Y$. Gesucht $\Pr[X \geq 2]$ und $\Pr[2/3 \cdot Y \geq 2] = \Pr[Y \geq 3]$.

$$\Pr[X \geq 2] = 1 - \Pr[X = 0] - \Pr[X = 1] = 1 - (0.6)^{10} - \tbinom{10}{1} \cdot (0.4) \cdot (0.6)^9 \approx 0.954$$
$$\Pr[Y \geq 3] = 1 - \Pr[Y = 0] - \Pr[Y = 1] - \Pr[Y = 2] = 1 - (0.6)^{15} - \tbinom{15}{1} \cdot (0.4) \cdot (0.6)^{14} - \tbinom{15}{2} \cdot (0.4)^2 \cdot (0.6)^{13} \approx 0.973$$

(b) $Z = X_1 + X_2 + X_3$ mit $X_i \sim \text{Geo}(3/4)$ mit X_i unabhängig und Z gestellte Fragen.

Linearität: $\mathbb{E}[Z] = 3 \cdot \mathbb{E}[X_i] = 4$.

Unabhängigkeit: $\text{Var}[Z] = 3 \cdot \text{Var}[X_i] = 3\frac{1/4}{(3/4)^2} = 4/3$.

W'keit zu bestehen: $\Pr[Z < 6] = \Pr[Z \leq 5] = \Pr[Z = 3] + \Pr[Z = 4] + \Pr[Z = 5]$:

$$(3/4)^3(1 + \binom{3}{2}(1/4) + \binom{4}{2}(1/4)^2) = (3/4)^3(1 + 3/4 + 3/8) = (3/4)^3(17/8) \approx 0.896$$

(c) $X \sim \text{Poi}(4)$. Gesucht: $\Pr[X > 2]$.

$$\Pr[X > 2] = 1 - e^{-4} \cdot \sum_{i=0}^{2} \frac{4^i}{i!} = 1 - e^{-4}(1 + 4 + 8) = 1 - e^{-4} \cdot 13$$

Aufgabe 4 **1P + 2P + 3P**

Professor Evilsparza muss einige mündliche Prüfungen abhalten. Die W'keit, dass ein Student besteht, hängt von der Laune von Professor E. ab. Dieser ist prinzipiell nur zu drei Gemütszuständen in der Lage: *gut gelaunt*, *schlecht gelaunt* und *rasend*.

- Ist er *gut gelaunt*, so lässt er einen Studenten mit W'keit 3/8 bestehen und mit W'keit 5/8 durchfallen.

  Er bleibt dabei *gut gelaunt*, falls der Student durchfällt; ansonsten wird er *schlecht gelaunt*.

- Ist er hingegen *schlecht gelaunt*, so besteht ein Student nur mit W'keit 1/8 und fällt entsprehend mit W'keit 7/8 durch.

  Fällt der Student durch, so verbessert sich die Laune von Professor E. und er wird *gut gelaunt*; ansonsten wird er *rasend*.

- Ist er schließlich *rasend*, so bricht er die Prüfung ab und lässt alle noch wartenden Studenten durchfallen.

Zu Beginn der ersten Prüfung ist Professor E. *gut gelaunt*.

Es sei X die Zufallsvariable, die zählt, wie viele Prüfungen Professor E. ablegen muss, bis er schließlich *rasend* wird.

(a) Geben Sie ein Markovdiagramm an, das das Gemüt von Professor E. wiedergibt.

(b) Leiten Sie eine lineare Gleichung für $\mathbb{E}[X]$ mit Hilfe bedingter Erwartungswerte her, indem Sie geeignet nach den Ausgängen der ersten Prüfungen unterscheiden.

Bestimmen Sie hiermit $\mathbb{E}[X]$.

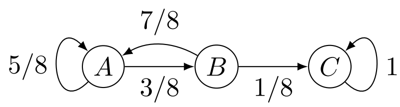
(c) Zeigen Sie, dass für die erzeugende Funktion $G_X(z)$ von X gilt:

$$64 \cdot G_X(z) = 3z^2 + (40z + 21z^2) \cdot G_X(z) \text{ für alle } z \in [0,1].$$

Bestimmen Sie hieraus $G_X(z)$ und überprüfen Sie mittels $G_X(z)$ Ihr Ergebnis für $\mathbb{E}[X]$.

Lösungsvorschlag:

(a) Diagramm:



(b) Wir betrachten die Ereignisse $[AA]$, $[ABA]$ und $[ABC]$, die gerade aus den einfachen Pfaden von A nach C bestehen, die mit dem entsprechenden Präfix beginnen.

Diese Ereignisse partitionieren die Menge der einfachen Pfade von A nach C. Daher gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|AA] \cdot \Pr[AA] + \mathbb{E}[X|ABA] \cdot \Pr[ABA] + \mathbb{E}[X|ABC] \cdot \Pr[ABC]\,.$$

Es gilt $\Pr[AA] = 5/8$, $\Pr[ABA] = 3/8 \cdot 7/8 = 21/64$ und $\Pr[ABC] = 3/64$.

Weiter gilt $\mathbb{E}[X|AA] = \mathbb{E}[X+1]$, $\mathbb{E}[X|ABA] = \mathbb{E}[X+2]$ und $\mathbb{E}[X|ABC] = 2$.

Damit ergibt sich

$$\mathbb{E}[X] = (1+\mathbb{E}[X]) \cdot 5/8 + (2+\mathbb{E}[X]) \cdot 21/64 + 2 \cdot 3/64 = 11/8 + 61/64 \cdot \mathbb{E}[X] \text{ bzw. } \mathbb{E}[X] = \frac{11/8}{3/64} = \frac{88}{3}.$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\Pr[X=k] &= \Pr[X=k|AA] \cdot \Pr[AA] + \Pr[X=k|ABA] \cdot \Pr[ABA] + \Pr[X=k|ABC] \cdot \Pr[ABC] \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } k \in \{0,1\} \\ \Pr[ABC] & \text{für } k = 2 \\ \Pr[X=k-1] \cdot \Pr[AA] + \Pr[X=k-2] \cdot \Pr[ABA] & \text{für } k > 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
G_X(z) &= \textstyle\sum_{k\geq 0} z^k \cdot \Pr[X=k] \\
&= z^2 \cdot \Pr[ABC] + \textstyle\sum_{k>2} z^k \cdot \Pr[X=k] \\
&= z^2 \cdot \Pr[ABC] + \textstyle\sum_{k>2} z^k \cdot (\Pr[X=k-1] \cdot \Pr[AA] + \Pr[X=k-2] \cdot \Pr[ABA]) \\
&= z^2 \cdot \Pr[ABC] + (z \cdot \Pr[AA] + z^2 \cdot \Pr[ABA]) \cdot G_X(z).
\end{aligned}$$

Auflösen führt auf

$$G_X(z) = \frac{3/64 \cdot z^2}{1 - 5/8 \cdot z - 21/64 \cdot z^2} = \frac{3z^2}{64 - 40z - 21z^2}.$$

Ableiten:

$$G_X'(z) = \frac{6 \cdot z}{64 - 40 \cdot z - 21 \cdot z^2} + \frac{3 \cdot z^2}{(64 - 40 \cdot z - 21 \cdot z^2)^2} \cdot (40 + 42 \cdot z).$$

Damit:

$$\mathbb{E}[X] = G_X'(1) = \frac{6}{3} + \frac{3}{3^2} \cdot 82 = \frac{6+82}{3} = \frac{88}{3}.$$