LÖSUNG

Midterm Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Sommersemester 2008

Hinweis: Alle Antworten sind zu begründen. Insbesondere sollte bei nicht-trivialen Umformungen kurz angegeben werden, weshalb diese Umformungen erlaubt sind (z.B.: Unabhängigkeit von ZV/Ereignissen, Disjunktheit von Ereignissen, Approximation mittels ZGWS, etc.)

Aufgabe 1 — je 1P = 6P

- Es seien A und B zwei Ereignisse mit $\Pr[A] = 0.2$ und $\Pr[A \cup B] = 0.6$.
  a) Zeigen Sie $0.4 \leq \Pr[B] \leq 0.6$.
  b) Seien A und B unabhängig. Zeigen Sie $\Pr[B] = 0.5$.
- Sie werfen n Mal eine Münze. Sei $\Omega = \{Z, K\}^n$ und $\Pr[\omega] = 1/2^n$ für alle $\omega \in \Omega$. Sei A_1 das Ereignis, dass höchstens ein Mal „Z“ erscheint. Sei A_2 das Ereignis, dass „Z“ und „K“ jeweils mindestens einmal erscheinen.
  c) Geben Sie für $n = 2$ die Ereignisse A_1 und A_2 als Teilmengen von Ω an. Sind für $n = 2$ die Ereignisse A_1 und A_2 unabhängig?
  d) Sind für $n = 3$ die Ereignisse A_1 und A_2 unabhängig?
- Sie werfen 16 Reiskörner so auf ein Schachbrett, dass jedes Reiskorn mit derselben W'keit in ein bestimmtes der 64 Schachfelder fällt. Alle Reiskörner treffen dabei auf das Schachbrett. Es sei N die Anzahl der Reiskörner, die in das Feld links oben fallen.
  e) Geben Sie $\Pr[N = 0]$ an. Geben Sie die Approximation von $\Pr[N = 1]$ mittels der Poisson-Verteilung an.
  f) Bestimmen Sie mit Hilfe der Markov-Ungleichung ein möglichst kleines n, so dass $\Pr[N < n] \geq 0.95$ gilt.

Lösungsvorschlag:

a) Da $B \subseteq A \cup B$, folgt $\Pr[B] \leq \Pr[A \cup B] = 0.6$. Mit der Siebformel gilt $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$ oder $\Pr[B] = \Pr[A \cup B] - \Pr[A] + \Pr[A \cap B] \geq \Pr[A \cup B] - \Pr[A] = 0.6 - 0.2 = 0.4$.

b) Es gilt außerdem $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$. Mit der Siebformel also: $\Pr[B] = \Pr[A \cup B] - \Pr[A] + \Pr[A \cap B] = \Pr[A \cup B] - \Pr[A] + \Pr[A] \cdot \Pr[B]$, oder $\Pr[B] = 0.6 - 0.2 + 0.2 \cdot \Pr[B]$, oder $\Pr[B] = 0.5$.

c) $A_1 = \{ZK, KZ, KK\}$ mit $\Pr[A_1] = 3/4$.
$A_2 = \{ZK, KZ\}$ mit $\Pr[A_2] = 1/2$.
$A_1 \cap A_2 = \{\text{ZK, KZ}\}$ mit $\Pr[A_1 \cap A_2] = 1/2 \neq 3/8 = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2]$

d) $A_1 = \{KKK, ZKK, KZK, KKZ\}$ mit $\Pr[A_1] = 4/8 = 1/2$.
$A_2 = \Omega \setminus \{KKK, ZZZ\}$ mit $\Pr[A_2] = 6/8 = 3/4$.
$A_1 \cap A_2 = \{ZKK, KZK, KKZ\}$ mit $\Pr[A_1 \cap A_2] = 3/8 = 1/2 \cdot 3/4 = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2]$, also unabhängig.

e)
$$\Pr[N = 0] = \left(1 - \frac{1}{64}\right)^{16} \text{ und } \Pr[N = 1] =\approx \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}}.$$

f)
$$\Pr[N < n] = 1 - \Pr[N \geq n] \geq 1 - \frac{\mathbb{E}[N]}{n} = 1 - \frac{1}{4n} \overset{!}{\geq} 0.95 \Rightarrow n = 5.$$

Aufgabe 2 **3P+2P+2P+1P=8P**

X und Y seien unabhängige, diskrete Zufallsvariablen, wobei X über $\{1, 2, \ldots, 31\}$ gleichverteilt ist, während Y gleichverteilt über $\{1, 2, \ldots, 25\}$ ist. X und Y geben dabei die Kantenlängen eines Rechtecks an. Mit A sei der Flächeninhalt, mit U der Umfang des durch X und Y bestimmten Rechtecks bezeichnet.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X und Y.

Hinweis:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von U.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von A.

d) Bestimmen Sie die Varianz von A.

Lösungsvorschlag:

a) Mit $n = 31$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2} = 16 \\
\mathbb{E}[X^2] &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} = 336 \\
\mathrm{Var}[X] &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12} = 80.
\end{aligned}$$

Entsprechend folgt für Y mit $n = 25$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= 13 \\
\mathbb{E}[Y^2] &= 221 \\
\mathrm{Var}[Y] &= 52.
\end{aligned}$$

b) Mit $U = 2(X + Y)$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U] &= 2 \cdot (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]) = 58 \\
\mathrm{Var}[U] &= 4 \cdot (\mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]) = 528.
\end{aligned}$$

c) Mit $A = XY$ und X, Y unabhängig gilt

$$\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 208$$

d) Da X und Y unabhängig sind, sind auch X^2 und Y^2 unabhängig nach Folie 139, bzw. man rechnet leicht nach:

$$\Pr[X^2 = x^2, Y^2 = y^2] = \Pr[X = x, Y = y] = \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y] = \Pr[X^2 = x^2] \cdot \Pr[Y^2 = y^2]$$

Man muss dabei beachten, dass X und Y nur positive Werte mit pos. W'keit annehmen.

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[A^2] &= \mathbb{E}[X^2 \cdot Y^2] = \mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[Y^2] = 74256 \\
\mathrm{Var}[A] &= \mathbb{E}[A^2] - \mathbb{E}[A]^2 = 30992
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 **2P+2P=4P**

Der (relative) Anteil der Frauen unter den Informatik-Studenten der TU München sei $p = 0.1$. Nehmen Sie an, dass zufällige Informatik-Studenten den Tag über das Service-Büro betreten.

a) Der Angestellte im Servicebüro kommt morgens in sein Büro. Die Zufallsvariable X gebe an, wie viele Studenten er abwarten muss, bis eine Frau das Büro betreten hat.

Geben Sie den Namen der Verteilung und die Dichte von X an. Bestimmen Sie weiterhin $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$.

b) Die Zufallsvariable Y gebe an, wie viele Studenten er abwarten muss, bis zwei Frauen *hintereinander* das Büro betreten haben.

Berechnen Sie $\mathbb{E}[Y]$.

Hinweis: Sie können z.B. entsprechend dem Beispiel aus der Vorlesung mit den drei 6en hintereinander vorgehen. Oder Sie orientieren sich an dem Lösungsweg zu der Übungsaufgabe mit dem Apfel und dem Wurm.

Lösungsvorschlag:

a) X ist geometrisch mit Parameter $p = 0.1$ verteilt. Es gilt somit

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2} = 90, \quad \mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} = 10, \quad \Pr[X = k] = q^{k-1} \cdot p = 0.9^{k-1} \cdot 0.1.$$

b) Ergebnismenge: $\Omega = \{m, f\}^*$. Ein Elementarereignis $g_1 g_2 \ldots g_n$ gibt dann die Geschlechter der Studenten an (vgl. Folie 122+).

i) Es gilt $\mathbb{E}[Y|\{m\}\{m,f\}^*] = 1 + \mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[Y_0|\{fm\}\{m,f\}^*] = 2 + \mathbb{E}[Y]$.

ii) Mit $q := 1 - p$, $F := \{f\}\{m,f\}^*$ und $M := \{m\}\{m,f\}^*$ gilt

$$y_0 := \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y|F] \cdot p + \mathbb{E}[Y|M] \cdot q = p \cdot y_1 + q \cdot (1 + y_0)$$

und mit $FM := \{fm\}\{m,f\}^*$

$$y_1 := \mathbb{E}[Y|F] = \mathbb{E}[Y|ff] \cdot p + \mathbb{E}[Y|FM] \cdot q = 2p + q \cdot (2 + y_0) = 2 + q \cdot y_0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$y_1 = y_0 - \frac{q}{p}.$$

Gleichsetzen mit der zweiten Gleichung führt auf:

$$y_0 - \frac{q}{p} = 2 + q \cdot y_0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{2 + q/p}{p} = \frac{2+9}{0.1} = 110.$$

Für $p = 0.6$ ergibt sich $y_0 = \frac{40}{9}$.

ii') Alternativ kann man auch auf die Gleichung für $\mathbb{E}[Y|F]$ verzichten und direkt die Gleichung von $\mathbb{E}[Y]$ weiter entwickeln:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[Y|M] \cdot q + \mathbb{E}[Y|F] \cdot p \\
&= q(1 + \mathbb{E}[Y]) + p(p\mathbb{E}[Y|ff] + q\mathbb{E}[Y|FM]) \\
&= q + q\mathbb{E}[Y] + p(2p + q(2 + \mathbb{E}[Y])) \\
&= q + q\mathbb{E}[Y] + p(2 + q\mathbb{E}[Y]) \\
&= 1 + p + (q + pq)\mathbb{E}[Y] \\
\mathbb{E}[Y] &= \tfrac{1+p}{1-q-pq} = \tfrac{1+p}{p-pq} = \tfrac{1+p}{p^2} = \tfrac{1.1}{0.01} = 110.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 — 2P+2P+2P=6P

Prof. Evilsparza behandelt seine Studierende wie folgt:

- Jemand, der sich in Quantenmechanik (Q) auskennt, besteht (B) die Klausur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$, egal ob er ein Mann (M) ist oder nicht.
- Ein Mann besteht die Klausur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$, egal, ob er sich mit Quantenmechanik auskennt oder nicht.
- Frauen, die sich nicht mit Quantenmechanik auskennen, haben keine Chance, die Klausur zu bestehen.

Es gilt: $\Pr[M] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[Q] = \frac{1}{3}$. Nehmen Sie ferner an, dass M und Q unabhängig sind.

a) Sie wissen von Thomas, dass er die Klausur bestanden hat. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er sich in Quantenmechanik auskennt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person (egal ob männlich oder weiblich) die Klausur besteht.

c) Prof. Evilsparza wählt eine Person (egal ob männlich oder weiblich) zufällig aus denjenigen aus, die bestanden haben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich diese Person in Quantenmechanik auskennt.

Lösungsvorschlag:

a) Gesucht ist $\Pr[Q|M,B]$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\Pr[Q|M,B] &= \frac{\Pr[Q\cap M\cap B]}{\Pr[M\cap B]}\\ &= \frac{\Pr[Q\cap M]\cdot\Pr[B|Q,M]}{\Pr[M]\cdot\Pr[B|M]}\\ &= \frac{\Pr[Q]\cdot\Pr[M]\cdot\frac{1}{5}}{\Pr[M]\cdot\frac{1}{5}}\\ &= \Pr[Q]\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

b) Gesucht ist $\Pr[B]$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\Pr[B] &= \Pr[M\cap Q]\cdot\Pr[B|M,Q] + \Pr[M\cap\overline{Q}]\cdot\Pr[B|M,\overline{Q}] + \Pr[\overline{M}\cap Q]\cdot\Pr[B|\overline{M},Q] + \Pr[\overline{M}\cap\overline{Q}]\cdot\Pr[B|\overline{M},\overline{Q}]\\ &= (\Pr[M]\cdot\Pr[Q] + \Pr[M]\cdot\Pr[\overline{Q}] + \Pr[\overline{M}]\cdot\Pr[Q])\cdot\frac{1}{5} + \Pr[\overline{M}]\cdot\Pr[\overline{Q}])\cdot 0\\ &= (\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6})\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{15}\end{aligned}$$

c) Gesucht ist $\Pr[Q|B]$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\Pr[Q|B] &= \frac{\Pr[Q\cap B]}{\Pr[B]}\\ &\overset{b)}{=} \frac{\Pr[Q]\cdot\Pr[B|Q]}{2/15}\\ &= \frac{1/3\cdot 1/5}{2/15} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$