Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie - Test 1

Sommersemester 2007

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnr.: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Hinweise

- Sie sollten insgesamt 3 Blätter erhalten haben.
- Tragen Sie bitte Ihre Antworten in den dafür jeweils vorgesehenen Platz auf den Aufgabenblättern ein.
- Sie können maximal 10 Punkte erreichen.
- Füllen Sie die untenstehende Tabelle bitte nicht aus.
- Viel Erfolg.

A1	A2	A3	$\sum$

Aufgabe 1 $\hfill$ 1P+1P+1P = 3 P

Wir betrachten eine Münze, welche nach einem Wurf mit Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ „Kopf“ (kurz K) und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ „Zahl“ (kurz Z) zeigt. Es wird folgendes Experiment durchgeführt:

Man wirft die Münze solange jeweils zweimal, bis sich entweder ZK oder KZ ergibt. Zur Beschreibung des Zufallsexperiments kann daher

$$\begin{aligned}\Omega &= \{KK, ZZ\}^*\{ZK, KZ\} \\ &= \{KZ,\quad ZK,\quad KK\,KZ,\quad KK\,ZK,\quad ZZ\,KZ,\quad ZZ\,ZK,\quad KK\,KK\,KZ,\quad \ldots\}\end{aligned}$$

gewählt werden.

A1-a Geben Sie $\Pr[ZK]$ und $\Pr[KK\,ZZ\,KK\,ZK]$ an.

Antwort:

$$\begin{aligned}\Pr[ZK] &= p(1-p) \\ \Pr[KK\,ZZ\,KK\,ZK] &= p^5(1-p)^3\end{aligned}$$

A1-b Für $n \geq 0$ bezeichne A_n das Ereignis, dass sich in den ersten n Doppelwürfen KK oder ZZ und im $n+1$.ten Wurf dann ZK ergibt, d.h.

$$A_n = \{KK, ZZ\}^n\{ZK\} = \{w_1w_1w_2w_2\ldots w_nw_nZK \mid w_1,\ldots,w_n \in \{Z,K\}\}.$$

Geben Sie $\Pr[A_n]$ an.

Antwort:

$\Pr[A_n] = (p^2+(1-p)^2)^n p(1-p)$

A1-c Sei nun $A = \{KK, ZZ\}^*\{ZK\}$ das Ereignis, dass sich schließlich im letzten Wurf ZK ergibt.

Berechnen Sie den konkreten Wert von $\Pr[A]$ unter Verwendung der $\Pr[A_n]$. In Ihrem Ergebnis sollte p nicht mehr auftreten.

Hinweis: Für $q \in (-1, 1)$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Antwort: Da A gerade die disjunkte Vereinigung der A_n ist, gilt:

$$\begin{aligned}
\Pr[A] &= \Pr[\textstyle\bigcup_{n\geq 0} A_n] \\
&= \textstyle\sum_{n\geq 0} \Pr[A_n] \\
&= \textstyle\sum_{n\geq 0} (p^2 + (1-p)^2)^n p(1-p) \\
&= p(1-p) \textstyle\sum_{n\geq 0} (p^2 + (1-p)^2)^n \\
&= p(1-p) \tfrac{1}{1-(p^2+p^2-2p+1)} \\
&= p(1-p) \tfrac{1}{2p(1-p)} \\
&= \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 **2P+1P = 3 P**

Seien X, Y *unabhängige* Zufallsvariablen auf Ω mit Wertebereich $W_X = W_Y = \{1, 2, 3\}$ und Dichte

$$\Pr[X = k] = \Pr[Y = k] = \frac{1}{3} \text{ für } k \in \{1, 2, 3\}.$$

Weiterhin sei die Zufallsvariable M auf Ω definiert durch

$$M := \max\{X, Y\}.$$

A2-a Zeigen Sie, dass $\Pr[M = k] = \dfrac{2k-1}{9}$ für alle $k \in \{1, 2, 3\}$ gilt.

Berechnen Sie hierfür zunächst $\Pr[M \leq k]$ und verwenden Sie dieses Zwischenergebnis, um $\Pr[M = k]$ zu berechnen.

Antwort:

$$\begin{aligned} \Pr[M \leq k] &= \Pr[\max\{X, Y\} \leq k] \\ &= \Pr[X \leq k, Y \leq k] \\ &= \Pr[X \leq k] \cdot \Pr[Y \leq k] \\ &= \Pr[X \leq k]^2 \\ &= \tfrac{k^2}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr[M = k] &= \Pr[M \leq k] - \Pr[M \leq k-1] \\ &= \tfrac{k^2-(k-1)^2}{9} \\ &= \tfrac{2k-1}{9}. \end{aligned}$$

A2-b Berechnen Sie $\mathbb{E}[M]$, $\mathbb{E}[M^2]$ und schließlich $\mathrm{Var}[M]$.

Antwort:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M] &= \textstyle\sum_{k=1}^{3} k \cdot \Pr[M = k] \\ &= \tfrac{1}{9}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5) \\ &= \tfrac{22}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M^2] &= \textstyle\sum_{k=1}^{3} k^2 \cdot \Pr[M = k] \\ &= \tfrac{1}{9}(1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 9 \cdot 5) \\ &= \tfrac{58}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[M] &= \mathbb{E}[M^2] - \mathbb{E}[M]^2 \\ &= \tfrac{58}{9} - (\tfrac{22}{9})^2 = \tfrac{522-484}{81} = \tfrac{38}{81} \approx 0.469 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 $\quad$ 1P + 1P + 2P = 4 P

Alice schickt Bob ein Signal über einen verrauschten Kanal. Das Signal, das Alice schickt, ist entweder u oder v, und das Signal, das Bob empfängt, ist entweder x oder y. Unsere Ergebnismenge ist daher:

$$\Omega = \{ \, (s,e) \mid s \in \{u,v\}, e \in \{x,y\} \, \},$$

wobei das Elementarereignis (s,e) gerade dafür steht, dass Alice „s“ sendet und Bob daraufhin „e“ empfängt.

Sei U bzw. V das Ereignis, dass Alice ein u bzw. v sendet, und X bzw. Y das Ereignis, dass Bob ein x bzw. y empfängt. Alice verschickt die Signale mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$\Pr[U] = 0.4, \quad \Pr[V] = 0.6.$$

Weiterhin gelte für die bedingten Wahrscheinlichkeiten, dass Bob das Signal e empfängt, falls Alice das Signal s sendet:

$$\Pr[X \mid U] = 0.8, \quad \Pr[X \mid V] = 0.3, \quad \Pr[Y \mid U] = 0.2, \quad \Pr[Y \mid V] = 0.7.$$

A3-a Geben Sie die Mengen U und Y an.

Antwort:

$$U = \{(u,x),(u,y)\}$$

$$Y = \{(u,y),(v,y)\}$$

A3-b Berechnen Sie $\Pr[X]$ und $\Pr[Y]$.

Antwort:

$$\Pr[X] = \Pr[X|U]\Pr[U] + \Pr[X|V]\Pr[V] = 0.8 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6 = 0.5$$

$$\Pr[Y] = \Pr[Y|U]\Pr[U] + \Pr[Y|V]\Pr[V] = 0.2 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.6 = 0.5$$

alternativ:

$$\Pr[Y] = \Pr[\Omega \setminus X] = \Pr[\Omega] - \Pr[X] = 1 - \Pr[X] = 0.5.$$

A3-c Bob empfängt ein x und möchte nun entscheiden, ob es wahrscheinlicher ist, dass Alice ein u geschickt hat, oder ob sie doch eher ein v gesendet hat.

Helfen Sie Bob, indem Sie die benötigten Wahrscheinlichkeiten berechnen.

Antwort: Wir benötigen die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\Pr[U|X]$ und $\Pr[V|X]$.

$$\Pr[U|X] = \Pr[X|U]\frac{\Pr[U]}{\Pr[X]} = 0.8\frac{0.4}{0.5} = \frac{16}{25}$$

$$\Pr[V|X] = \Pr[X|V]\frac{\Pr[V]}{\Pr[X]} = 0.3\frac{0.6}{0.5} = \frac{9}{25}.$$

alternativ:

$$\Pr[V|X] = \Pr[\Omega \setminus U \mid X] = \Pr[\Omega \mid X] - \Pr[U \mid X] = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

Somit ist es wahrscheinlicher, dass Alice ein u gesendet hat.