Wiederholung: **bedingte W'keit**

Gegeben:

- $(\Omega, \Pr)$ diskreter W'keitsraum.
- B Ereignis mit $\Pr[B] > 0$.
- A bel. Ereignis.

Dann:

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

"W'keit von A unter der Bedingung, dass B eintritt".

Running Example

Ereignisse:

- U : Student fühlt sich unwohl nach Mittagessen.
- M : Student hat in der Mensa gegessen.

Können z.B. durch Umfragen $\Pr[U|M]$ und $\Pr[M]$ “bestimmen”.

Running Example

Ereignisse:

- U : Student fühlt sich unwohl nach Mittagessen.
- M : Student hat in der Mensa gegessen.

Können z.B. durch Umfragen $\Pr[U|M]$ und $\Pr[M]$ "bestimmen".

Frage:

- Mit welcher W'keit isst ein Student in der Mensa und fühlt sich danach unwohl? $\Pr[M \cap U]$ gesucht .

Running Example

Ereignisse:

- U : Student fühlt sich unwohl nach Mittagessen.
- M : Student hat in der Mensa gegessen.

Können z.B. durch Umfragen $\Pr[U|M]$ und $\Pr[M]$ "bestimmen".

Frage:

- Mit welcher W'keit isst ein Student in der Mensa und fühlt sich danach unwohl? $\Pr[M \cap U]$ gesucht .

Nach Definition:

$$\Pr[U|M] = \frac{\Pr[M \cap U]}{\Pr[M]} \text{ also } \Pr[M \cap U] = \Pr[U|M] \cdot \Pr[M].$$

Multiplikationssatz

Verallgemeinerung von $\Pr[M \cap U] = \Pr[U|M] \cdot \Pr[M]$.

Gegeben:

- Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit $\Pr[\bigcap_{i=1}^{n} A_i] > 0$.

Dann gilt:

$$\Pr[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n]$$

Multiplikationssatz

Verallgemeinerung von $\Pr[M \cap U] = \Pr[U|M] \cdot \Pr[M]$.

Gegeben:

- Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit $\Pr[\bigcap_{i=1}^n A_i] > 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \Pr[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] \\ = \; & \Pr[A_1 \cap \textstyle\bigcap_{i=2}^n A_i] \end{aligned}$$

Multiplikationssatz

Verallgemeinerung von $\Pr[M \cap U] = \Pr[U|M] \cdot \Pr[M]$.

Gegeben:

- Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit $\Pr[\bigcap_{i=1}^n A_i] > 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \Pr[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] \\
= \; & \Pr[A_1 \cap \textstyle\bigcap_{i=2}^n A_i] \\
= \; & \Pr[A_1 | \textstyle\bigcap_{i=2}^n A_i] \cdot \Pr[A_2 \cap \textstyle\bigcap_{i=3}^n A_i]
\end{aligned}$$

Multiplikationssatz

Verallgemeinerung von $\Pr[M \cap U] = \Pr[U|M] \cdot \Pr[M]$.

Gegeben:

- Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit $\Pr[\bigcap_{i=1}^n A_i] > 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \Pr[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] \\
= \; & \Pr[A_1 \cap \textstyle\bigcap_{i=2}^n A_i] \\
= \; & \Pr[A_1 | \textstyle\bigcap_{i=2}^n A_i] \cdot \Pr[A_2 \cap \textstyle\bigcap_{i=3}^n A_i] \\
= \; & \Pr[A_1 | \textstyle\bigcap_{i=2}^n A_i] \cdot \Pr[A_2 | \textstyle\bigcap_{i=3}^n A_i] \cdot \Pr[\textstyle\bigcap_{i=3}^n A_i]
\end{aligned}$$

Multiplikationssatz

Verallgemeinerung von $\Pr[M \cap U] = \Pr[U|M] \cdot \Pr[M]$.

Gegeben:

- Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit $\Pr[\bigcap_{i=1}^n A_i] > 0$.

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& \Pr[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] \\
= \; & \Pr[A_1 \cap \textstyle\bigcap_{i=2}^n A_i] \\
= \; & \Pr[A_1 | \textstyle\bigcap_{i=2}^n A_i] \cdot \Pr[A_2 \cap \textstyle\bigcap_{i=3}^n A_i] \\
= \; & \Pr[A_1 | \textstyle\bigcap_{i=2}^n A_i] \cdot \Pr[A_2 | \textstyle\bigcap_{i=3}^n A_i] \cdot \Pr[\textstyle\bigcap_{i=3}^n A_i] \\
\vdots \; &
\end{aligned}
$$

Multiplikationssatz

Verallgemeinerung von $\Pr[M \cap U] = \Pr[U|M] \cdot \Pr[M]$.

Gegeben:

- Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit $\Pr[\bigcap_{i=1}^n A_i] > 0$.

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& \Pr[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] \\
= \; & \Pr[A_1 \cap \textstyle\bigcap_{i=2}^n A_i] \\
= \; & \Pr[A_1 | \textstyle\bigcap_{i=2}^n A_i] \cdot \Pr[A_2 \cap \textstyle\bigcap_{i=3}^n A_i] \\
= \; & \Pr[A_1 | \textstyle\bigcap_{i=2}^n A_i] \cdot \Pr[A_2 | \textstyle\bigcap_{i=3}^n A_i] \cdot \Pr[\textstyle\bigcap_{i=3}^n A_i] \\
\vdots \; & \\
= \; & \Pr[A_1 | \textstyle\bigcap_{i=2}^n A_i] \cdot \Pr[A_2 | \textstyle\bigcap_{i=3}^n A_i] \cdots \Pr[A_{n-1} | A_n] \cdot pr[A_n].
\end{aligned}
$$

Multiplikationssatz

Verallgemeinerung von $\Pr[M \cap U] = \Pr[U|M] \cdot \Pr[M]$.

Gegeben:

- Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ mit $\Pr[\bigcap_{i=1}^{n} A_i] > 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \Pr[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n] \\
= \; & \Pr[A_1 \cap \textstyle\bigcap_{i=2}^{n} A_i] \\
= \; & \Pr[A_1 | \textstyle\bigcap_{i=2}^{n} A_i] \cdot \Pr[A_2 \cap \textstyle\bigcap_{i=3}^{n} A_i] \\
= \; & \Pr[A_1 | \textstyle\bigcap_{i=2}^{n} A_i] \cdot \Pr[A_2 | \textstyle\bigcap_{i=3}^{n} A_i] \cdot \Pr[\textstyle\bigcap_{i=3}^{n} A_i] \\
\vdots \; & \\
= \; & \Pr[A_1 | \textstyle\bigcap_{i=2}^{n} A_i] \cdot \Pr[A_2 | \textstyle\bigcap_{i=3}^{n} A_i] \cdots \Pr[A_{n-1} | A_n] \cdot pr[A_n].
\end{aligned}$$

Beachte: $\Pr[\bigcap_{i=k}^{n} A_i] \geq \Pr[\Pr[\bigcap_{i=1}^{n} A_i] > 0$.

Geburtstagsbeispiel

Running Example

Ereignisse:

- U : Student fühlt sich unwohl nach Mittagessen.
- M : Student hat in der Mensa gegessen.
- B : Student hat im Bistro gegessen.

Wieder $\Pr[U|M], \Pr[U|B], pr[B]$ und $\Pr[M]$ bekannt, z.B. durch Umfragen.

Running Example

Ereignisse:

- U : Student fühlt sich unwohl nach Mittagessen.
- M : Student hat in der Mensa gegessen.
- B : Student hat im Bistro gegessen.

Wieder $\Pr[U|M], \Pr[U|B], pr[B]$ und $\Pr[M]$ bekannt, z.B. durch Umfragen.

Frage:

- Mit welcher W'keit fühlt sich ein Student nach dem Mittagessen unwohl, wenn $B \uplus M = \Omega$ gilt? $\Pr[U]$ gesucht .

Running Example

Ereignisse:

- U : Student fühlt sich unwohl nach Mittagessen.
- M : Student hat in der Mensa gegessen.
- B : Student hat im Bistro gegessen.

Wieder $\Pr[U|M], \Pr[U|B], pr[B]$ und $\Pr[M]$ bekannt, z.B. durch Umfragen.
Frage:

- Mit welcher W'keit fühlt sich ein Student nach dem Mittagessen unwohl, wenn $B \uplus M = \Omega$ gilt? $\Pr[U]$ gesucht .

Beobachtung:

$$U = U \cap \Omega = U \cap (M \uplus B) = (U \cap M) \uplus (U \cap B).$$

Also

$$\Pr[U] = \Pr[U \cap M] + \Pr[U \cap B] = \Pr[U|M] \cdot \Pr[M] + \Pr[U|B] \cdot \Pr[B].$$

Satz von der totalen W'keit (S.v.d.t.W).

Verallgemeinerung von $\Pr[U] = \Pr[U|M] \cdot \Pr[M] + \Pr[U|B] \cdot \Pr[B]$.

Gegeben:

- $(A_i)_{i \in I}$ abzählbar viele Ereignisse, paarweise disjunkt mit $\Pr[A_i] > 0$.
- E Ereignis mit $E \subseteq \biguplus_{i \in I} A_i$.

Satz von der totalen W'keit (S.v.d.t.W).

Verallgemeinerung von $\Pr[U] = \Pr[U|M] \cdot \Pr[M] + \Pr[U|B] \cdot \Pr[B]$.

Gegeben:

- $(A_i)_{i \in I}$ abzählbar viele Ereignisse, paarweise disjunkt mit $\Pr[A_i] > 0$.
- E Ereignis mit $E \subseteq \biguplus_{i \in I} A_i$.

Dann gilt:

$$E = E \cap \biguplus_{i \in I} A_i = \biguplus_{i \in I} (E \cap A_i),$$

Also:

Satz von der totalen W'keit (S.v.d.t.W).

Verallgemeinerung von $\Pr[U] = \Pr[U|M] \cdot \Pr[M] + \Pr[U|B] \cdot \Pr[B]$.

Gegeben:

- $(A_i)_{i \in I}$ abzählbar viele Ereignisse, paarweise disjunkt mit $\Pr[A_i] > 0$.
- E Ereignis mit $E \subseteq \biguplus_{i \in I} A_i$.

Dann gilt:

$$E = E \cap \biguplus_{i \in I} A_i = \biguplus_{i \in I} (E \cap A_i),$$

Also:

$$\Pr[E] \quad = \quad \sum_{i \in I} \Pr[E \cap A_i]$$

Satz von der totalen W'keit (S.v.d.t.W).

Verallgemeinerung von $\Pr[U] = \Pr[U|M] \cdot \Pr[M] + \Pr[U|B] \cdot \Pr[B]$.

Gegeben:

- $(A_i)_{i \in I}$ abzählbar viele Ereignisse, paarweise disjunkt mit $\Pr[A_i] > 0$.
- E Ereignis mit $E \subseteq \biguplus_{i \in I} A_i$.

Dann gilt:

$$E = E \cap \biguplus_{i \in I} A_i = \biguplus_{i \in I} (E \cap A_i),$$

Also:

$$\begin{aligned} \Pr[E] &= \sum_{i \in I} \Pr[E \cap A_i] \\ &= \sum_{i \in I} \Pr[E|A_i] \cdot \Pr[A_i]. \end{aligned}$$

Running Example

Ereignisse:

- U : Student fühlt sich unwohl nach Mittagessen.
- M : Student hat in der Mensa gegessen.
- B : Student hat im Bistro gegessen.

Wieder $\Pr[U|M], \Pr[U|B], pr[B]$ und $\Pr[M]$ bekannt, z.B. durch Umfragen.

Running Example

Ereignisse:

- U : Student fühlt sich unwohl nach Mittagessen.
- M : Student hat in der Mensa gegessen.
- B : Student hat im Bistro gegessen.

Wieder $\Pr[U|M], \Pr[U|B], pr[B]$ und $\Pr[M]$ bekannt, z.B. durch Umfragen.
Frage:

- Mit welcher W'keit hat ein Student, dem es unwohl ist, im Bistro gegessen? $\Pr[B|U]$ gesucht .

Running Example

Ereignisse:

- U : Student fühlt sich unwohl nach Mittagessen.
- M : Student hat in der Mensa gegessen.
- B : Student hat im Bistro gegessen.

Wieder $\Pr[U|M], \Pr[U|B], pr[B]$ und $\Pr[M]$ bekannt, z.B. durch Umfragen.
Frage:

- Mit welcher W'keit hat ein Student, dem es unwohl ist, im Bistro gegessen? $\Pr[B|U]$ gesucht .

Beobachtung:

$$\Pr[B|U] = \frac{\Pr[B \cap U]}{\Pr[U]} = \frac{\Pr[B \cap U]}{\Pr[U]} \cdot \frac{\Pr[B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[U|B] \cdot \Pr[B]}{\Pr[U]}$$

$$= \frac{\Pr[U|B] \cdot \Pr[B]}{\Pr[U|M] \cdot \Pr[M] + \Pr[U|B] \cdot \Pr[B]}.$$

Running Example

Ereignisse:

- U : Student fühlt sich unwohl nach Mittagessen.
- M : Student hat in der Mensa gegessen.
- B : Student hat im Bistro gegessen.

Wieder $\Pr[U|M], \Pr[U|B], pr[B]$ und $\Pr[M]$ bekannt, z.B. durch Umfragen.
Frage:

- Mit welcher W'keit hat ein Student, dem es unwohl ist, im Bistro gegessen? $\Pr[B|U]$ gesucht .

Beobachtung:

$$\Pr[B|U] = \frac{\Pr[B \cap U]}{\Pr[U]} = \frac{\Pr[B \cap U]}{\Pr[U]} \cdot \frac{\Pr[B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[U|B] \cdot \Pr[B]}{\Pr[U]}$$

$$= \frac{\Pr[U|B] \cdot \Pr[B]}{\Pr[U|M] \cdot \Pr[M] + \Pr[U|B] \cdot \Pr[B]}.$$

Running Example

Ereignisse:

- U : Student fühlt sich unwohl nach Mittagessen.
- M : Student hat in der Mensa gegessen.
- B : Student hat im Bistro gegessen.

Wieder $\Pr[U|M], \Pr[U|B], pr[B]$ und $\Pr[M]$ bekannt, z.B. durch Umfragen.
Frage:

- Mit welcher W'keit hat ein Student, dem es unwohl ist, im Bistro gegessen? $\Pr[B|U]$ gesucht .

Beobachtung:

$$\Pr[B|U] = \frac{\Pr[B \cap U]}{\Pr[U]} = \frac{\Pr[B \cap U]}{\Pr[U]} \cdot \frac{\Pr[B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[U|B] \cdot \Pr[B]}{\Pr[U]}$$

$$= \frac{\Pr[U|B] \cdot \Pr[B]}{\Pr[U|M] \cdot \Pr[M] + \Pr[U|B] \cdot \Pr[B]}.$$

Satz von Bayes

Verallgemeinerung von $\Pr[B|U] = \frac{\Pr[U|B]\cdot\Pr[B]}{\Pr[U|M]\cdot\Pr[M]+\Pr[U|B]\cdot\Pr[B]}$.

Gegeben:

- $(A_i)_{i\in I}$ abzählbar viele Ereignisse, paarweise disjunkt mit $\Pr[A_i] > 0$.
- E Ereignis mit $E \subseteq \biguplus_{i\in I} A_i$ mit $\Pr[E] > 0$.

Dann gilt:

.

Satz von Bayes

Verallgemeinerung von $\Pr[B|U] = \frac{\Pr[U|B]\cdot\Pr[B]}{\Pr[U|M]\cdot\Pr[M]+\Pr[U|B]\cdot\Pr[B]}$.

Gegeben:

- $(A_i)_{i\in I}$ abzählbar viele Ereignisse, paarweise disjunkt mit $\Pr[A_i] > 0$.
- E Ereignis mit $E \subseteq \biguplus_{i\in I} A_i$ mit $\Pr[E] > 0$.

Dann gilt:

$$\Pr[A_i|E] \quad = \quad \frac{\Pr[E|A_i]\cdot\Pr[A_i]}{\Pr[E]}$$

.

Satz von Bayes

Verallgemeinerung von $\Pr[B|U] = \frac{\Pr[U|B] \cdot \Pr[B]}{\Pr[U|M] \cdot \Pr[M] + \Pr[U|B] \cdot \Pr[B]}$.

Gegeben:

- $(A_i)_{i \in I}$ abzählbar viele Ereignisse, paarweise disjunkt mit $\Pr[A_i] > 0$.
- E Ereignis mit $E \subseteq \biguplus_{i \in I} A_i$ mit $\Pr[E] > 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Pr[A_i|E] &= \frac{\Pr[E|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\Pr[E]} \\ &= \frac{\Pr[E|A_i] \cdot pr[A_i]}{\sum_{i \in I} \Pr[E|A_i] \cdot \Pr[A_i]} \end{aligned}$$

.

Satz von Bayes

Verallgemeinerung von $\Pr[B|U] = \frac{\Pr[U|B]\cdot\Pr[B]}{\Pr[U|M]\cdot\Pr[M]+\Pr[U|B]\cdot\Pr[B]}$.

Gegeben:

- $(A_i)_{i\in I}$ abzählbar viele Ereignisse, paarweise disjunkt mit $\Pr[A_i] > 0$.
- E Ereignis mit $E \subseteq \biguplus_{i\in I} A_i$ mit $\Pr[E] > 0$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \Pr[A_i|E] &= \frac{\Pr[E|A_i]\cdot\Pr[A_i]}{\Pr[E]} \\ &= \frac{\Pr[E|A_i]\cdot pr[A_i]}{\sum_{i\in I}\Pr[E|A_i]\cdot\Pr[A_i]} \end{aligned}$$

.

Kurzform: S.v.d.t.W. in $\Pr[A_i|E] = \frac{[E|A_i]\cdot\Pr[A_i]}{\Pr[E]}$ "stöpseln".

Running Example

Ereignisse:

- U : Student fühlt sich unwohl nach Mittagessen.
- M : Student hat in der Mensa gegessen.

Angenommen es gilt

$$\Pr[U|M] = \Pr[U],$$

das heißt:

- die W'keit, dass es einem Studenten nach dem Mittagessen unwohl sein wird, ist gleich
- der W'keit, dass es ihm unwohl sein wird, unter der Bedingung, dass er in der Mensa isst.

Running Example

Ereignisse:

- U : Student fühlt sich unwohl nach Mittagessen.
- M : Student hat in der Mensa gegessen.

Angenommen es gilt

$$\Pr[U|M] = \Pr[U],$$

das heißt:

- die W'keit, dass es einem Studenten nach dem Mittagessen unwohl sein wird, ist gleich
- der W'keit, dass es ihm unwohl sein wird, unter der Bedingung, dass er in der Mensa isst.

Es ist also egal , ob er in der Mensa isst! (liegt wohl an der Vorlesung)

Formal: zwei Ereignisse A, B sind unabhängig , falls $\Pr[A|B] = \Pr[A]$.

Beispiel

Beispiel zu Def. 23

Gegeben:

- $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^n$: n-mal Würfeln mit $\Pr[\omega] = 6^{-n}$.
- A_i : im i.ten Wurf eine gerade Augenzahl mit $\Pr[A_i] = 1/2$.
- S : insgesamt ungerade Augensumme ($\Pr[S] =$???).

Beispiele:

- $\{A_1, \ldots, A_n\}$ unabhängig.
- $\{A_1, \ldots, A_n, S\}$ abhängig.

Lemma 24

Notation : $A^0 := \overline{A}$, $A^1 := A$.

Gegeben:

- $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse

Es gilt:

$\{A_1, \ldots, A_n\}$ unabhängig genau dann, wenn

$$\forall (s_1, \ldots, s_n) \in \{0,1\}^n : \Pr[\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{s_i}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}].$$

gilt.

Lemma 24

Notation : $A^0 := \overline{A}$, $A^1 := A$.

Gegeben:

- $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse

Es gilt:

$\{A_1, \ldots, A_n\}$ unabhängig genau dann, wenn

$$\forall (s_1, \ldots, s_n) \in \{0,1\}^n : \Pr[\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{s_i}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}].$$

gilt.

Beispiel : Für $n = 2$ bedeutet das:

$\{A_1, A_2\}$ unabhängig gdw.

$$\begin{array}{rclrcl} \Pr[A_1, A_2] & = & \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] & \Pr[\overline{A}_1, A_2] & = & \Pr[\overline{A}_1] \cdot \Pr[A_2] \\ \Pr[A_1, \overline{A_2}] & = & \Pr[A_1] \cdot \Pr[\overline{A}_2] & \Pr[\overline{A}_1, \overline{A}_2] & = & \Pr[\overline{A}_1] \cdot \Pr[\overline{A}_2] \end{array}$$

Beweis zu Lemma 24

($\Rightarrow$) Zeigen: Wenn $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig, dann gilt

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}].$$

Sei k Anzahl von 0en in $(s_1, \ldots, s_n)$.

Induktion über n, gefolgt von Induktion über k:

Beweis zu Lemma 24

($\Rightarrow$) Zeigen: Wenn $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig, dann gilt

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}].$$

Sei k Anzahl von 0en in $(s_1, \ldots, s_n)$.

Induktion über n, gefolgt von Induktion über k:
Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Also sei $n > 0$.

Beweis zu Lemma 24

($\Rightarrow$) Zeigen: Wenn $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig, dann gilt

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}].$$

Sei k Anzahl von 0en in $(s_1, \ldots, s_n)$.

Induktion über n, gefolgt von Induktion über k:
Für $k = 0$ gilt $s_i = 1$ für all i, also $A_i^{s_i} = A_i$ und

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}]$$

Beweis zu Lemma 24

($\Rightarrow$) Zeigen: Wenn $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig, dann gilt

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}].$$

Sei k Anzahl von 0en in $(s_1, \ldots, s_n)$.

Induktion über n, gefolgt von Induktion über k:
Sei $k > 0$ und ohne Einschränkung $s_1 = 0$ (sonst umnummerieren):

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] \quad = \quad \Pr[\overline{A}_1 \cap A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}]$$

Beweis zu Lemma 24

($\Rightarrow$) Zeigen: Wenn $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig, dann gilt

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}].$$

Sei k Anzahl von 0en in $(s_1, \ldots, s_n)$.

Induktion über n, gefolgt von Induktion über k:
Sei $k > 0$ und ohne Einschränkung $s_1 = 0$ (sonst umnummerieren):

$$\begin{aligned}
\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[\overline{A}_1 \cap A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}] \\
&= \Pr[(\Omega \setminus A_1) \cap A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}]
\end{aligned}$$

Beweis zu Lemma 24

($\Rightarrow$) Zeigen: Wenn $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig, dann gilt

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}].$$

Sei k Anzahl von 0en in $(s_1, \ldots, s_n)$.

Induktion über n, gefolgt von Induktion über k:
Sei $k > 0$ und ohne Einschränkung $s_1 = 0$ (sonst umnummerieren):

$$\begin{aligned}
\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[\overline{A}_1 \cap A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}] \\
&= \Pr[(\Omega \setminus A_1) \cap A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}] \\
&= \Pr[A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}] - \Pr[A_1 \cap A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}]
\end{aligned}$$

Beweis zu Lemma 24

($\Rightarrow$) Zeigen: Wenn $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig, dann gilt

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}].$$

Sei k Anzahl von 0en in $(s_1, \ldots, s_n)$.

Induktion über n, gefolgt von Induktion über k:
Sei $k > 0$ und ohne Einschränkung $s_1 = 0$ (sonst umnummerieren):

$$\begin{aligned}
\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[\overline{A}_1 \cap A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}] \\
&= \Pr[(\Omega \setminus A_1) \cap A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}] \\
&= \Pr[A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}] - \Pr[A_1 \cap A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}] \\
&= \prod_{i=2}^{n} \Pr[A_i^{s_i}] - \Pr[A_1] \cdot \prod_{i=2}^{n} \Pr[A_i^{s_i}]
\end{aligned}$$

Beweis zu Lemma 24

($\Rightarrow$) Zeigen: Wenn $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig, dann gilt

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}].$$

Sei k Anzahl von 0en in $(s_1, \ldots, s_n)$.

Induktion über n, gefolgt von Induktion über k:
Sei $k > 0$ und ohne Einschränkung $s_1 = 0$ (sonst umnummerieren):

$$\begin{aligned}
\Pr[A_1^{s_1} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[\overline{A}_1 \cap A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}] \\
&= \Pr[(\Omega \setminus A_1) \cap A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}] \\
&= \Pr[A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}] - \Pr[A_1 \cap A_2^{s_2} \ldots \cap A_n^{s_n}] \\
&= \prod_{i=2}^{n} \Pr[A_i^{s_i}] - \Pr[A_1] \cdot \prod_{i=2}^{n} \Pr[A_i^{s_i}] \\
&= \Pr[\overline{A}_1] \cdot \prod_{i=2}^{n} \Pr[A_i^{s_i}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}]
\end{aligned}$$

Beweis zu Lemma 24

$(\Leftarrow)$ Zeigen, dass aus

$$\forall (s_1, \ldots, s_n) \in \{0,1\}^n : \Pr[\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{s_i}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}] \quad (*)$$

folgt, dass $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig mittels Widerspruchsbeweis.

Beweis zu Lemma 24

($\Leftarrow$) Zeigen, dass aus

$$\forall (s_1, \ldots, s_n) \in \{0,1\}^n : \Pr[\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{s_i}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}] \quad (*)$$

folgt, dass $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig mittels Widerspruchsbeweis.
Annahme : $A_1, \ldots, A_n$ nicht unabhängig.
Also existieren $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ mit

$$\Pr[\bigcap_{l=1}^{k} A_{i_l}] \neq \prod_{l=1}^{k} \Pr[A_{i_l}].$$

Wir dürfen annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_k = k$.
Beachte : $(*)$ gilt zunächst nur für all n Ereignisse $\rightsquigarrow$ "Ergänze 1en".

Beweis zu Lemma 24

($\Leftarrow$) Zeigen, dass aus

$$\forall (s_1, \ldots, s_n) \in \{0,1\}^n : \Pr[\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{s_i}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}] \quad (*)$$

folgt, dass $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig mittels Widerspruchsbeweis.

$$\begin{aligned} \prod_{l=1}^{k} \Pr[A_{i_l}] &= \left(\prod_{l=1}^{k} \Pr[A_l]\right) \cdot \prod_{l=k+1}^{n} \Pr[A_l \cup \overline{A_l}] \\ &= \left(\prod_{l=1}^{k} \Pr[A_l]\right) \cdot \prod_{l=k+1}^{n} (\Pr[A_l] + \Pr[\overline{A_l}]) \end{aligned} .$$

Beweis zu Lemma 24

($\Leftarrow$) Zeigen, dass aus

$$\forall (s_1, \ldots, s_n) \in \{0,1\}^n : \Pr[\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{s_i}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}] \quad (*)$$

folgt, dass $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig mittels Widerspruchsbeweis.

$$\begin{aligned}
\prod_{l=1}^{k} \Pr[A_{i_l}] &= \left(\prod_{l=1}^{k} \Pr[A_l]\right) \cdot \prod_{l=k+1}^{n} \Pr[A_l \cup \overline{A_l}] \\
&= \left(\prod_{l=1}^{k} \Pr[A_l]\right) \cdot \prod_{l=k+1}^{n} (\Pr[A_l] + \Pr[\overline{A_l}]) \\
&= \left(\prod_{l=1}^{k} \Pr[A_l]\right) \cdot \sum_{(s_{k+1},\ldots,s_n) \in \{0,1\}^{n-k}} \prod_{l=k+1}^{n} \Pr[A_l^{s_l}]
\end{aligned} .$$

Beweis zu Lemma 24

$(\Leftarrow)$ Zeigen, dass aus

$$\forall (s_1, \ldots, s_n) \in \{0,1\}^n : \Pr[\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{s_i}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}] \quad (*)$$

folgt, dass $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig mittels Widerspruchsbeweis.

$$\begin{aligned}
\prod_{l=1}^{k} \Pr[A_{i_l}] &= \left(\prod_{l=1}^{k} \Pr[A_l]\right) \cdot \prod_{l=k+1}^{n} \Pr[A_l \cup \overline{A_l}] \\
&= \left(\prod_{l=1}^{k} \Pr[A_l]\right) \cdot \prod_{l=k+1}^{n} (\Pr[A_l] + \Pr[\overline{A_l}]) \\
&= \left(\prod_{l=1}^{k} \Pr[A_l]\right) \cdot \sum_{(s_{k+1},\ldots,s_n)\in\{0,1\}^{n-k}} \prod_{l=k+1}^{n} \Pr[A_l^{s_l}] \\
&= \sum_{(s_{k+1},\ldots,s_n)\in\{0,1\}^{n-k}} \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1}^{s_{k+1}} \cap \ldots \cap A_n^{s_n}]
\end{aligned}$$

Beweis zu Lemma 24

($\Leftarrow$) Zeigen, dass aus

$$\forall(s_1,\ldots,s_n)\in\{0,1\}^n : \Pr[\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{s_i}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}] \quad (*)$$

folgt, dass $A_1,\ldots,A_n$ unabhängig mittels Widerspruchsbeweis.

$$\begin{aligned}
\prod_{l=1}^{k} \Pr[A_{i_l}] &= \left(\prod_{l=1}^{k} \Pr[A_l]\right)\cdot\prod_{l=k+1}^{n} \Pr[A_l \cup \overline{A_l}] \\
&= \left(\prod_{l=1}^{k} \Pr[A_l]\right)\cdot\prod_{l=k+1}^{n} (\Pr[A_l] + \Pr[\overline{A_l}]) \\
&= \left(\prod_{l=1}^{k} \Pr[A_l]\right)\cdot\sum_{(s_{k+1},\ldots,s_n)\in\{0,1\}^{n-k}} \prod_{l=k+1}^{n} \Pr[A_l^{s_l}] \\
&= \sum_{(s_{k+1},\ldots,s_n)\in\{0,1\}^{n-k}} \Pr[A_1\cap\ldots\cap A_k\cap A_{k+1}^{s_{k+1}}\cap\ldots\cap A_n^{s_n}] \\
&= \Pr[A_1\cap\ldots\cap A_k].
\end{aligned}$$

Beachte : die $\bigcap_{l=k+1}^{n} A_l^{s_l}$ bilden eine Partition von Ω.

Folgerungen aus Lemma 24

- Wenn A und B unabhängig, dann auch $\{A, \overline{B}\}$, $\{\overline{A}, B\}$ und $\{\overline{A}, \overline{B}\}$

Folgerungen aus Lemma 24

- Wenn A und B unabhängig, dann auch $\{A, \overline{B}\}$, $\{\overline{A}, B\}$ und $\{\overline{A}, \overline{B}\}$
- Bsp.: Klausur '07: $\Pr[A|B] = 1/3$ und $\overline{A}, B$ unabhängig. Was ist $pr[A]$?

Folgerungen aus Lemma 24

- Wenn A und B unabhängig, dann auch $\{A, \overline{B}\}$, $\{\overline{A}, B\}$ und $\{\overline{A}, \overline{B}\}$
- Bsp.: Klausur '07: $\Pr[A|B] = 1/3$ und $\overline{A}, B$ unabhängig. Was ist $pr[A]$?
- $\{A, B, C\}$ unabhängig, dann auch $\{A \cap B, C\}$ unabhängig.

  $\Pr[(A \cap B) \cap C] = \Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C] = \Pr[A \cap B] \cdot \Pr[C]$.

Folgerungen aus Lemma 24

- Wenn A und B unabhängig, dann auch $\{A, \overline{B}\}$, $\{\overline{A}, B\}$ und $\{\overline{A}, \overline{B}\}$
- Bsp.: Klausur '07: $\Pr[A|B] = 1/3$ und $\overline{A}, B$ unabhängig. Was ist $pr[A]$?
- $\{A, B, C\}$ unabhängig, dann auch $\{A \cap B, C\}$ unabhängig.

  $$\Pr[(A \cap B) \cap C] = \Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C] = \Pr[A \cap B] \cdot \Pr[C].$$
- $\{A, B, C\}$ unabhängig, dann auch $\{A \cup B, C\}$:
  a) $\{\overline{A}, \overline{B}, C\}$ unabhängig, dann auch $\{\overline{A} \cap \overline{B}, C\}$.

Folgerungen aus Lemma 24

- Wenn A und B unabhängig, dann auch $\{A, \overline{B}\}$, $\{\overline{A}, B\}$ und $\{\overline{A}, \overline{B}\}$
- Bsp.: Klausur '07: $\Pr[A|B] = 1/3$ und $\overline{A}, B$ unabhängig. Was ist $pr[A]$?
- $\{A, B, C\}$ unabhängig, dann auch $\{A \cap B, C\}$ unabhängig.

  $$\Pr[(A \cap B) \cap C] = \Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C] = \Pr[A \cap B] \cdot \Pr[C].$$

- $\{A, B, C\}$ unabhängig, dann auch $\{A \cup B, C\}$:
  a) $\{\overline{A}, \overline{B}, C\}$ unabhängig, dann auch $\{\overline{A} \cap \overline{B}, C\}$.
  b) $\{A, B, C\}$ unabhängig gdw. $\{\overline{A}, \overline{B}, C\}$ unabhängig.

Folgerungen aus Lemma 24

- Wenn A und B unabhängig, dann auch $\{A, \overline{B}\}$, $\{\overline{A}, B\}$ und $\{\overline{A}, \overline{B}\}$
- Bsp.: Klausur '07: $\Pr[A|B] = 1/3$ und $\overline{A}, B$ unabhängig. Was ist $pr[A]$?
- $\{A, B, C\}$ unabhängig, dann auch $\{A \cap B, C\}$ unabhängig.

  $$\Pr[(A \cap B) \cap C] = \Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C] = \Pr[A \cap B] \cdot \Pr[C].$$

- $\{A, B, C\}$ unabhängig, dann auch $\{A \cup B, C\}$:
  a) $\{\overline{A}, \overline{B}, C\}$ unabhängig, dann auch $\{\overline{A} \cap \overline{B}, C\}$.
  b) $\{A, B, C\}$ unabhängig gdw. $\{\overline{A}, \overline{B}, C\}$ unabhängig.
  c) $\{A \cup B, C\}$ unabhängig gdw. $\{\overline{A \cup B}, C\}$ unabhängig gdw. $\{\overline{A} \cap \overline{B}, C\}$ unabhängig.