Definition (Stochastischer Prozess (kurz: SP) =)

- Stochastische Beschreibung eines Systems.
- Folge $(X_t)_{t \in T}$ von ZVs.
- X_t beschreibt Zustand des Systems zum Zeitpunkt t.
- T Menge von Zeitpunkten, z.B.: $T = [0, \infty)$ oder $T = \mathbb{N}$.
- Wertebereich von X_t kann endlich, abzählbar oder überabzählbar sein.

Definition (Stochastischer Prozess (kurz: SP) =)

- Stochastische Beschreibung eines Systems.
- Folge $(X_t)_{t \in T}$ von ZVs.
- X_t beschreibt Zustand des Systems zum Zeitpunkt t.
- T Menge von Zeitpunkten, z.B.: $T = [0, \infty)$ oder $T = \mathbb{N}$.
- Wertebereich von X_t kann endlich, abzählbar oder überabzählbar sein.

Bsp.: Poisson-Prozess

- Ausgehend von $T_1, T_2, \ldots$ u.i.v. mit $T_i \sim \exp(\lambda)$.
  - T_i gibt Lebenszeit einer Komponente an, z.B. Server, Glühbirne, etc.
- $X_t = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{n} T_i \leq t\}$.
  - X_t gibt an, wie oft Komponente erneuert werden muss (Erneuerungsprozess).
- $T = [0, \infty)$.
- $W_{X_t} = \mathbb{N}$.
- Schon gesehen $X_t \sim \mathrm{Po}(\lambda t)$.

Definition (Stochastischer Prozess (kurz: SP) =)

- Stochastische Beschreibung eines Systems.
- Folge $(X_t)_{t \in T}$ von ZVs.
- X_t beschreibt Zustand des Systems zum Zeitpunkt t.
- T Menge von Zeitpunkten, z.B.: $T = [0, \infty)$ oder $T = \mathbb{N}$.
- Wertebereich von X_t kann endlich, abzählbar oder überabzählbar sein.

Bsp.: Brownsche Bewegung

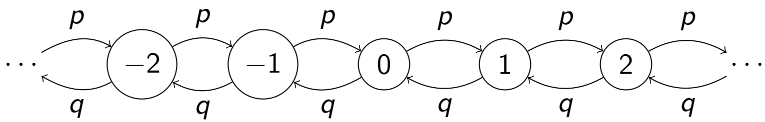
- Betrachten markiertes Teilchen in Gas/Flüßigkeit (Applet).
- Abstraktion von großer Teilchenzahl mittels stochastischem Modell.
- $X_t \in \mathbb{R}^2$ gibt Position des Teilchens zur Zeit $t \in [0, \infty)$ an.
- Mathematisches Modell: Wiener Prozess, wichtig für Aktienkursmodellierung.
- Teilchen „macht“ einen Random Walk.

Definition (Stochastischer Prozess (kurz: SP) =)

- Stochastische Beschreibung eines Systems.
- Folge $(X_t)_{t \in T}$ von ZVs.
- X_t beschreibt Zustand des Systems zum Zeitpunkt t.
- T Menge von Zeitpunkten, z.B.: $T = [0, \infty)$ oder $T = \mathbb{N}$.
- Wertebereich von X_t kann endlich, abzählbar oder überabzählbar sein.

Bsp.: 1-dim. diskreter Random Walk

- Einfachste Approximation der Brownschen Bewegung:
- Nur diskrete Zeit $T = \mathbb{N}$.
- Teilchen kann sich nur 1 Einheit nach rechts oder links bewegen: $X_t \in \mathbb{Z}$.
- p W'keit für Bewegung nach rechts ($q := 1 - p$ nach links).

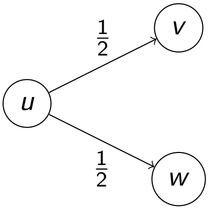


Definition (Stochastischer Prozess (kurz: SP) =)

- Stochastische Beschreibung eines Systems.
- Folge $(X_t)_{t \in T}$ von ZVs.
- X_t beschreibt Zustand des Systems zum Zeitpunkt t.
- T Menge von Zeitpunkten, z.B.: $T = [0, \infty)$ oder $T = \mathbb{N}$.
- Wertebereich von X_t kann endlich, abzählbar oder überabzählbar sein.

Bsp.: Random Surfer

- $G = (V, E)$ gerichteter Graph
  - V : Webseiten (endlich).
  - E : Links.
- Benutzer wählt gleichverteilt Link von aktueller Seite aus.
- $T = \mathbb{N}$, $X_t \in V$.
- Grundlage für PageRank.
- (Random Walk auf (Web-)Graph).



Definition (Stochastischer Prozess (kurz: SP) =)

- Stochastische Beschreibung eines Systems.
- Folge $(X_t)_{t \in T}$ von ZVs.
- X_t beschreibt Zustand des Systems zum Zeitpunkt t.
- T Menge von Zeitpunkten, z.B.: $T = [0, \infty)$ oder $T = \mathbb{N}$.
- Wertebereich von X_t kann endlich, abzählbar oder überabzählbar sein.

Weitere Bsp.:

- Stochastische Modelle von endlichen Automaten (wie CPU, einfache Programme, etc.).
  - W'keiten $\widehat{=}$ relative Häufigkeit für Zustandsübergang.
- Aus Übungen/Vorlesung:
  - Drei „6“en hintereinander: $X_t \in \{0, 1, 2, 3\}$ zählt „6“en.
  - Frisbee-Spiel: $X_t \in \{0, 1, 2\}$ gibt Abstand der Frisbees zueinander an.
  - Wurm-Apfel: $X_t \in \{0, 1, 2\}$ gibt Abstand Wurm-Apfel an.
- Allen gemeinsam:
  - diskrete Zeit $T = \mathbb{N}$,
  - endlicher Zustandsraum $W_{X_t} = [n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ (n fest).

Definition (Stochastischer Prozess (kurz: SP) =)

- Stochastische Beschreibung eines Systems.
- Folge $(X_t)_{t \in T}$ von ZVs.
- X_t beschreibt Zustand des Systems zum Zeitpunkt t.
- T Menge von Zeitpunkten, z.B.: $T = [0, \infty)$ oder $T = \mathbb{N}$.
- Wertebereich von X_t kann endlich, abzählbar oder überabzählbar sein.

Wichtige Fragen ($T = \mathbb{N}$, $X_t \in [n]$):

- W'keit von Zustand i irgendwann nach Zustand j zu kommen.
  - Bsp.: Mit welcher W'keit erreicht System kritischen Zustand/Bereich.
- Mittlere Anzahl von (Zeit-)Schritten, um von Zustand i nach Zustand j zu kommen.
  - Bsp.: Leistungsanalyse, Identifizierung von Bottlenecks.
- Strebt das System gegen „Gleichgewicht“? D.h. gilt für $t \to \infty$, dass X_t und X_{t+1} (fast) identisch-verteilt sind?
  - Bsp.: Pendelt sich „Verteilung“ des Random Surfers in eine stationäre Verteilung ein? Falls ja: Intepretation der stationären Verteilung als „Relevanz“ der Webseiten.

Definition (Stochastischer Prozess (kurz: SP) =)

- Stochastische Beschreibung eines Systems.
- Folge $(X_t)_{t \in T}$ von ZVs.
- X_t beschreibt Zustand des Systems zum Zeitpunkt t.
- T Menge von Zeitpunkten, z.B.: $T = [0, \infty)$ oder $T = \mathbb{N}$.
- Wertebereich von X_t kann endlich, abzählbar oder überabzählbar sein.

Im Weiteren:

Betrachten nur stochastische Prozesse $(X_t)_{t \in T}$ mit

- diskreter Zeit $T = \mathbb{N}$.
- endlichem Zustandsraum $X_t \in [n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$
  - System mit $n \in \mathbb{N}$ festen Zuständen.
- zeithomogenen Zustandsübergangsw'keiten:
  - W'keit von i nach j zum Zeitpunkt t zu wechseln unabhängig von Zeit und vorangegangenen Zuständen (Historie).
  - Vgl.: Frisbee-Spiel, Wurm-Apfel, Drei „6“en, etc.

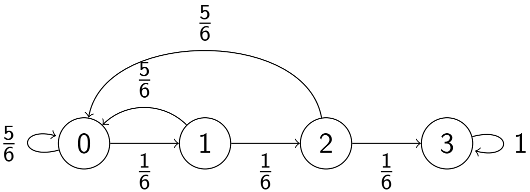
Bsp.: Drei „6“en hintereinander:

- Vier Zustände: $[4] = \{0, 1, 2, 3\}$ (Zähler).
- Diskrete Zeit: $T = \mathbb{N}$ (Anzahl Würfe).
- Zu Beginn: $\Pr[X_0 = 0] = 1$.
- Bleiben in 3, sobald erreicht (Experiment zu Ende):

$$\Pr[X_{t+1} = 3 | X_t = 3] = 1 \quad (\forall t \in \mathbb{N}).$$

- Sonst ($i < 3$): W'keit eine „6“ zu sehen gerade $\frac{1}{6}$, also:

$$\Pr[X_{t+1} = i + 1 | X_t = i] = \frac{1}{6} \text{ und } \Pr[X_{t+1} = 0 | X_t = i] = \frac{5}{6} \quad (\forall t \in \mathbb{N}).$$



Definition (Endliche, zeithomogene Markov-Kette $(X_t)_{t\in T}$:)

- Diskrete Zeit $T = \mathbb{N}$ und endlicher Zustandsraum $X_t \in [n] (\forall t \in \mathbb{N})$.
- Notation: Verteilung von X_t zum Zeitpunkt t

$$q^{(t)} := (\Pr[X_t = 0], \Pr[X_t = 1], \ldots, \Pr[X_t = n-1])$$

- Anfangsverteilung $q^{(0)}$ gegeben.
- W'keit $p_{i,j}$ für Zustandsübergang $i \to j$ gegeben und konstant:

$$\Pr[X_{t+1} = j | X_t = i] = \Pr[X_1 = j | X_0 = i] = p_{i,j} \quad (\forall t \in \mathbb{N}).$$

mit

$$\sum_{j\in[n]} \Pr[X_{t+1} = j | X_t = i] = 1 \quad (\forall i \in [n]).$$

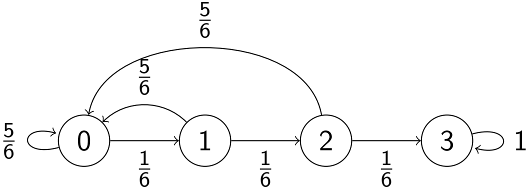
- Notation: $P = (p_{i,j})$ Zustandsübergangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} p_{0,0} & \cdots & p_{0,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-1,0} & \cdots & p_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \left(\Pr[X_{t+1} = j | X_0 = i]\right)_{i,j\in[n]}$$

Drei „6“en hintereinander:

- $n = 4$.
- Startverteilung: $q^{(0)} = (\Pr[X_0 = j])_{j \in [n]} = (1, 0, 0, 0)$.
- Zustandsübergangsmatrix:

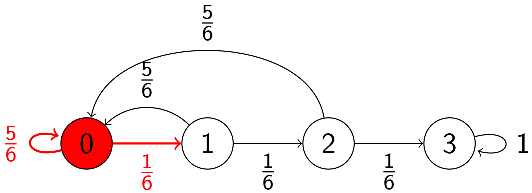
$$P = (\Pr[X_{t+1} = j | X_t = i])_{i,j \in [n]} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Drei „6“en hintereinander:

- $n = 4$.
- Startverteilung: $q^{(0)} = (\Pr[X_0 = j])_{j \in [n]} = (1, 0, 0, 0)$.
- Zustandsübergangsmatrix:

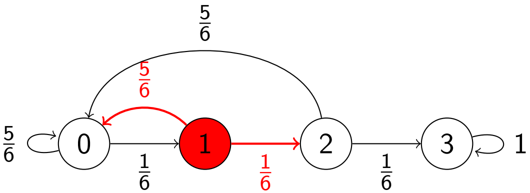
$$P = (\Pr[X_{t+1} = j | X_t = i])_{i,j \in [n]} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Drei „6“en hintereinander:

- $n = 4$.
- Startverteilung: $q^{(0)} = (\Pr[X_0 = j])_{j \in [n]} = (1, 0, 0, 0)$.
- Zustandsübergangsmatrix:

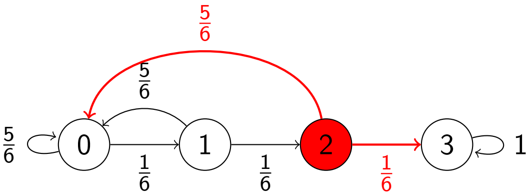
$$P = (\Pr[X_{t+1} = j | X_t = i])_{i,j \in [n]} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Drei „6“en hintereinander:

- $n = 4$.
- Startverteilung: $q^{(0)} = (\Pr[X_0 = j])_{j\in[n]} = (1, 0, 0, 0)$.
- Zustandsübergangsmatrix:

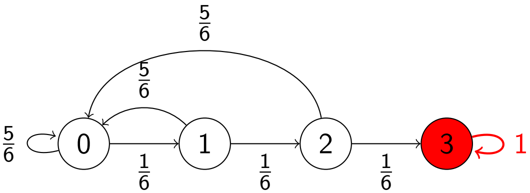
$$P = (\Pr[X_{t+1} = j | X_t = i])_{i,j\in[n]} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Drei „6“en hintereinander:

- $n = 4$.
- Startverteilung: $q^{(0)} = (\Pr[X_0 = j])_{j \in [n]} = (1, 0, 0, 0)$.
- Zustandsübergangsmatrix:

$$P = (\Pr[X_{t+1} = j | X_t = i])_{i,j \in [n]} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



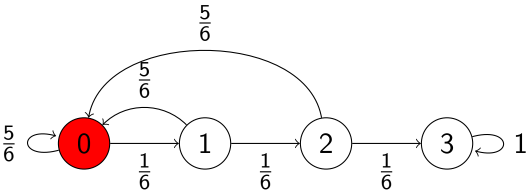
Drei „6“en hintereinander:

$$q^{(0)} = (1, 0, 0, 0)$$

$$q^{(1)} = (5/6, 1/6, 0, 0) = q^{(0)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

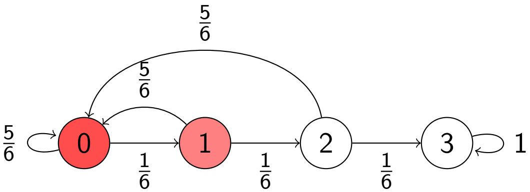
$$q^{(2)} = (30/36, 5/36, 1/36, 0) = q^{(1)} \cdot P.$$

$$q^{(3)} = (180/216, 30/216, 5/216, 1/216) = q^{(2)} \cdot P.$$



Drei „6“en hintereinander:

$$
\begin{aligned}
q^{(0)} &= (1,0,0,0) \\
q^{(1)} &= {\color{red}(5/6, 1/6, 0, 0)} = q^{(0)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\
q^{(2)} &= (30/36, 5/36, 1/36, 0) = q^{(1)} \cdot P. \\
q^{(3)} &= (180/216, 30/216, 5/216, 1/216) = q^{(2)} \cdot P.
\end{aligned}
$$



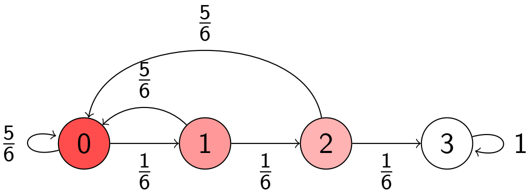
Drei „6“en hintereinander:

$$q^{(0)} = (1, 0, 0, 0)$$

$$q^{(1)} = (5/6, 1/6, 0, 0) = q^{(0)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

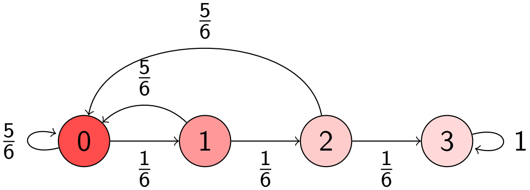
$$q^{(2)} = (30/36, 5/36, 1/36, 0) = q^{(1)} \cdot P.$$

$$q^{(3)} = (180/216, 30/216, 5/216, 1/216) = q^{(2)} \cdot P.$$



Drei „6“en hintereinander:

$$
\begin{aligned}
q^{(0)} &= (1,0,0,0) \\
q^{(1)} &= (5/6, 1/6, 0, 0) = q^{(0)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\
q^{(2)} &= (30/36, 5/36, 1/36, 0) = q^{(1)} \cdot P. \\
q^{(3)} &= (180/216, 30/216, 5/216, 1/216) = q^{(2)} \cdot P.
\end{aligned}
$$



Lemma

Für alle $t \in \mathbb{N}$:

$$q^{(t)} = q^{(0)} \cdot P^t$$

Beweis:

- Reicht $q^{(t+1)} = q^{(t)} \cdot P$ zu zeigen.
- Betrachten j-te Komponente von $q^{(t+1)} = (\Pr[X_{t+1} = i])_{i \in [n]}$:

$$\begin{aligned}
q_j^{(t+1)} &= \Pr[X_{t+1} = j] \\
&= \sum_{i \in [n]} \Pr[X_{t+1} = j | X_t = i] \cdot \Pr[X_t = i] \\
&= \sum_{i \in [n]} p_{i,j} \cdot q_i^{(t)} \\
&= q^{(t)} \cdot \begin{pmatrix} p_{0,j} \\ \vdots \\ p_{n-1,j} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lemma

Für alle $t \in \mathbb{N}$:

$$q^{(t)} = q^{(0)} \cdot P^t$$

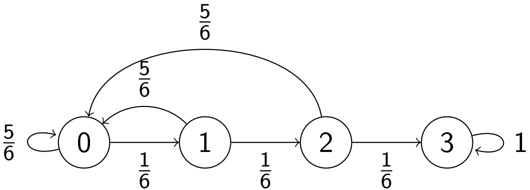
Anmerkung: Berechnung von $q^{(t)} = q^{(0)} \cdot P^t$

Falls P diagonalisierbar mit $P = Q \cdot D \cdot Q^{-1}$ und D Diagonalmatrix:

$$P^t = (Q \cdot D \cdot Q^{-1})^t = Q \cdot D \cdot Q^{-1} \cdot Q \cdot D \cdot Q^{-1} \cdot \ldots \cdot Q \cdot D \cdot Q^{-1} = Q \cdot D^t \cdot Q^{-1}.$$

Frage aus Vorlesung:

- Wie viele Würfe (=Zeitschritte) bis Experiment endet.
- Experiment endet, sobald 3 das erste Mal besucht wird.



Frage aus Vorlesung:

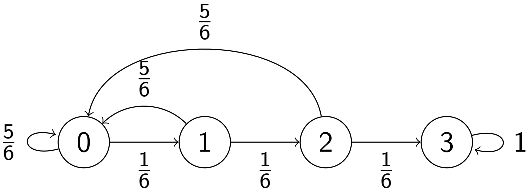
- Wie viele Würfe (=Zeitschritte) bis Experiment endet.
- Experiment endet, sobald 3 das erste Mal besucht wird.

Definition (Übergangszeit)

- ZV $T_{i,j}$ zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man j das erste Mal besucht.
- $T_{i,j} := \infty$, falls j im aktuellen Experimentverlauf nie erreicht wird.

Bsp.:

Experimentverlauf $\omega = (0, 1, 2, 0, 1, \ldots) \rightsquigarrow T_{0,2}(\omega) = 2$.



Frage aus Vorlesung:

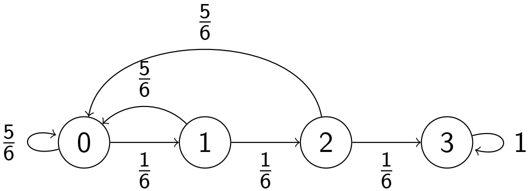
- $\mathbb{E}[T_{0,3}]$ gesucht.

Definition (Übergangszeit)

- ZV $T_{i,j}$ zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man j das erste Mal besucht.
- $T_{i,j} := \infty$, falls j im aktuellen Experimentverlauf nie erreicht wird.

Anmerkung:

Insbesondere gilt stets $\Pr[T_{i,i} = 0] = 1$ und $\Pr[T_{i,i} > 0] = 0$.

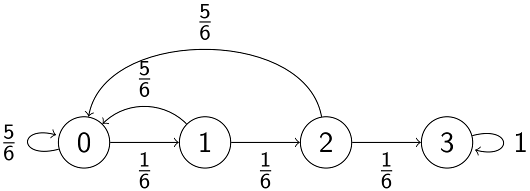


Definition (Übergangszeit)

- ZV $T_{i,j}$ zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man j das erste Mal besucht.
- $T_{i,j} := \infty$, falls j im aktuellen Experimentverlauf nie erreicht wird.

Bsp.:

$$\Pr[T_{0,3} < 3] = 0$$
$$\Pr[T_{0,3} = 3] = p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{1}{6^3}$$
$$\Pr[T_{0,3} = 4] = p_{0,0}p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{5}{6^4}$$
$$\Pr[T_{0,3} = 5] = p_{0,0}^2 p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} + p_{0,1}p_{1,0}p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{5^2}{6^5} + \frac{5}{6^5}.$$

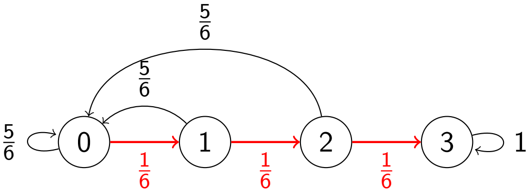


Definition (Übergangszeit)

- ZV $T_{i,j}$ zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man j das erste Mal besucht.
- $T_{i,j} := \infty$, falls j im aktuellen Experimentverlauf nie erreicht wird.

Bsp.:

$$\Pr[T_{0,3} < 3] = 0$$
$$\Pr[T_{0,3} = 3] = p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{1}{6^3}$$
$$\Pr[T_{0,3} = 4] = p_{0,0}p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{5}{6^4}$$
$$\Pr[T_{0,3} = 5] = p_{0,0}^2 p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} + p_{0,1}p_{1,0}p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{5^2}{6^5} + \frac{5}{6^5}.$$

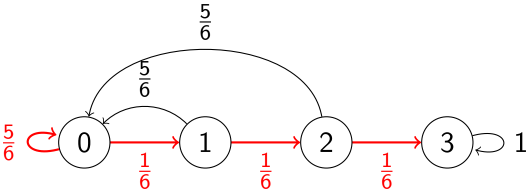


Definition (Übergangszeit)

- ZV $T_{i,j}$ zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man j das erste Mal besucht.
- $T_{i,j} := \infty$, falls j im aktuellen Experimentverlauf nie erreicht wird.

Bsp.:

$$\Pr[T_{0,3} < 3] = 0$$
$$\Pr[T_{0,3} = 3] = p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{1}{6^3}$$
$$\Pr[T_{0,3} = 4] = p_{0,0}p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{5}{6^4}$$
$$\Pr[T_{0,3} = 5] = p_{0,0}^2 p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} + p_{0,1}p_{1,0}p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{5^2}{6^5} + \frac{5}{6^5}.$$

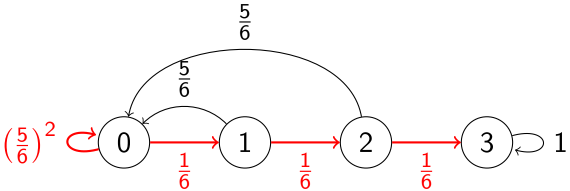


Definition (Übergangszeit)

- ZV $T_{i,j}$ zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man j das erste Mal besucht.
- $T_{i,j} := \infty$, falls j im aktuellen Experimentverlauf nie erreicht wird.

Bsp.:

$$\Pr[T_{0,3} < 3] = 0$$
$$\Pr[T_{0,3} = 3] = p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{1}{6^3}$$
$$\Pr[T_{0,3} = 4] = p_{0,0}p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{5}{6^4}$$
$$\Pr[T_{0,3} = 5] = p_{0,0}^2 p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} + p_{0,1}p_{1,0}p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{5^2}{6^5} + \frac{5}{6^5}.$$

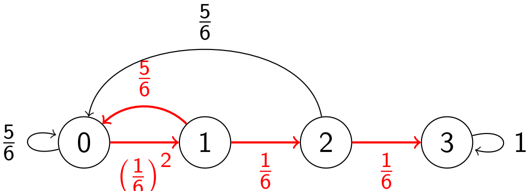


Definition (Übergangszeit)

- ZV $T_{i,j}$ zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man j das erste Mal besucht.
- $T_{i,j} := \infty$, falls j im aktuellen Experimentverlauf nie erreicht wird.

Bsp.:

$$\Pr[T_{0,3} < 3] = 0$$
$$\Pr[T_{0,3} = 3] = p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{1}{6^3}$$
$$\Pr[T_{0,3} = 4] = p_{0,0}p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{5}{6^4}$$
$$\Pr[T_{0,3} = 5] = p_{0,0}^2 p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} + p_{0,1}p_{1,0}p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = \frac{5^2}{6^5} + \frac{5}{6^5}.$$



Definition (Übergangszeit)

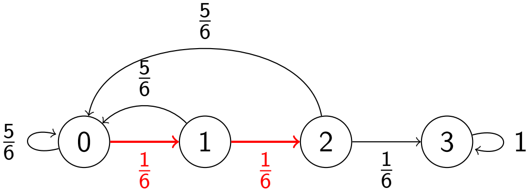
- ZV $T_{i,j}$ zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man j das erste Mal besucht.
- $T_{i,j} := \infty$, falls j im aktuellen Experimentverlauf nie erreicht wird.

Fakt:

$\Pr[T_{i,k} = l] \mathrel{\hat{=}}$ „Gewicht“ aller Pfade der Länge l von i nach j, wobei j genau einmal besucht wird.

Interpretation:

ZV $T_{i,k}$ entspricht neuem Experiment, in dem Zustand k keine ausgehenden Kanten mehr hat. (i = Startzustand, k = Endzustand).



Definition (Übergangszeit)

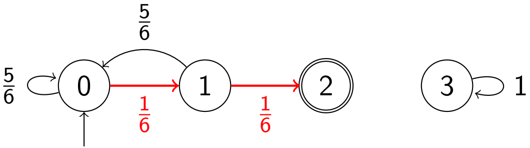
- ZV $T_{i,j}$ zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man j das erste Mal besucht.
- $T_{i,j} := \infty$, falls j im aktuellen Experimentverlauf nie erreicht wird.

Fakt:

$\Pr[T_{i,k} = l] \mathrel{\hat{=}}$ „Gewicht“ aller Pfade der Länge l von i nach j, wobei j genau einmal besucht wird.

Bsp.:

$\Pr[T_{0,2} = 2] = p_{0,1}p_{1,2} = \frac{1}{36}$.



Fakt:

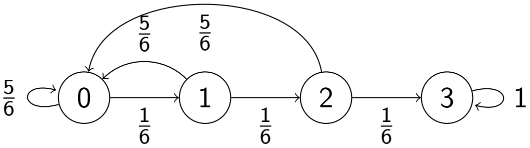
$\Pr[T_{i,k} = l] \;\hat{=}$ „Gewicht“ aller Pfade der Länge l von i nach j, wobei j genau einmal besucht wird.

Lemma (Rekursionsgleichung für $\Pr[T_{i,k} = l]$ ($i = k$))

$$Pr[T_{i,i} = 0] = 1,\; Pr[T_{i,i} > 0] = 0$$

Idee:

Es existiert genau einen Pfad, der in i beginnt und i genau einmal besucht.



Fakt:

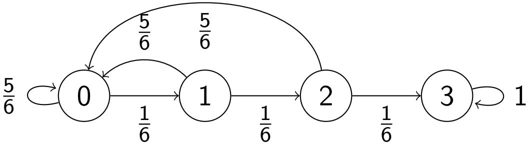
$\Pr[T_{i,k} = l] \;\hat{=}\;$ „Gewicht“ aller Pfade der Länge l von i nach j, wobei j genau einmal besucht wird.

Lemma (Rekursionsgleichung für $\Pr[T_{i,k} = l]$ $(i \neq k)$)

$$Pr[T_{i,k} = 0] = 0$$

Idee:

Da $i \neq k$ muss mindestens ein (Zeit-)Schritt gemacht werden.



Fakt:

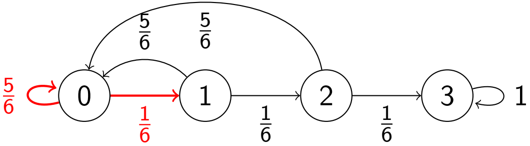
$\Pr[T_{i,k} = l] \mathrel{\hat{=}}$ „Gewicht“ aller Pfade der Länge l von i nach j, wobei j genau einmal besucht wird.

Lemma (Rekursionsgleichung für $\Pr[T_{i,k} = l]$ $(i \neq k, l > 0)$)

$$\begin{aligned} Pr[T_{i,k} = l] &= \sum_{j\in[n]} Pr[T_{i,k} = l, X_1 = j] \\ &= \sum_{j\in[n]} p_{i,j} \cdot Pr[T_{j,k} = l-1] \end{aligned}$$

Idee:

Partitionieren Pfade von i nach k bzgl. erstem Knoten $X_1 = j$, der nach $X_0 = i$ besucht wird (Beachte: $\Pr[T_{k,k} = 0] = 1$).



Fakt:

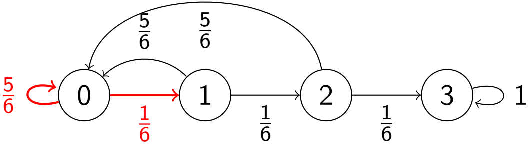
$\Pr[T_{i,k} = l] \mathrel{\hat{=}}$ „Gewicht" aller Pfade der Länge l von i nach j, wobei j genau einmal besucht wird.

Lemma (Rekursionsgleichung für $\Pr[T_{i,k} = l]$ ($i \neq k, l > 0$))

$$
\begin{aligned}
Pr[T_{i,k} = l] &= \sum_{j \in [n]} Pr[T_{i,k} = l, X_1 = j] \\
&= \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot Pr[T_{j,k} = l - 1]
\end{aligned}
$$

$[T_{0,3} = 5]$

entspricht Pfaden $(0, 0, 0, 1, 2, 3)$ und $(0, 1, 0, 1, 2, 3)$.



Fakt:

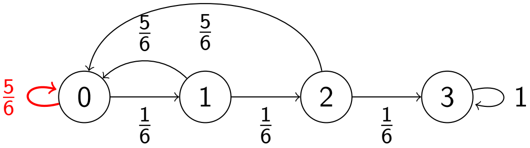
$\Pr[T_{i,k} = l] \mathrel{\hat{=}}$ „Gewicht“ aller Pfade der Länge l von i nach j, wobei j genau einmal besucht wird.

Lemma (Rekursionsgleichung für $\Pr[T_{i,k} = l]$ $(i \neq k, l > 0)$)

$$\begin{aligned} Pr[T_{i,k} = l] &= \sum_{j\in[n]} Pr[T_{i,k} = l, X_1 = j] \\ &= \sum_{j\in[n]} p_{i,j} \cdot Pr[T_{j,k} = l-1] \end{aligned}$$

$[T_{0,3} = 5, X_1 = 0]$

entspricht Pfad $(0, 0, 0, 1, 2, 3)$. $[T_{0,3} = 4]$ entspricht $(0, 0, 1, 2, 3)$.



Fakt:

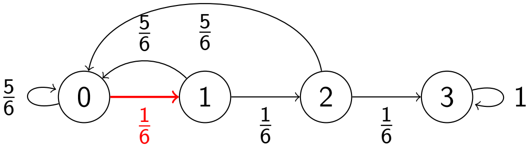
$\Pr[T_{i,k} = l] \mathrel{\hat{=}}$ „Gewicht" aller Pfade der Länge l von i nach j, wobei j genau einmal besucht wird.

Lemma (Rekursionsgleichung für $\Pr[T_{i,k} = l]$ ($i \neq k, l > 0$))

$$\begin{aligned} Pr[T_{i,k} = l] &= \sum_{j\in[n]} Pr[T_{i,k} = l, X_1 = j] \\ &= \sum_{j\in[n]} p_{i,j} \cdot Pr[T_{j,k} = l-1] \end{aligned}$$

$[T_{0,3} = 5, X_1 = 1]$

entspricht Pfad $(0, 1, 0, 1, 2, 3)$. $[T_{1,3} = 4]$ entspricht $(1, 0, 1, 2, 3)$.



Fakt:

$\Pr[T_{i,k} = l] \mathrel{\hat{=}}$ „Gewicht" aller Pfade der Länge l von i nach j, wobei j genau einmal besucht wird.

Lemma (Rekursionsgleichung für $\Pr[T_{i,k} = l]$)

- $(i = k) : Pr[T_{i,i} = 0] = 1,\ Pr[T_{i,i} > 0] = 0.$
- $(i \neq k) :$

$$\begin{aligned} Pr[T_{i,k} = 0] &= 0 \\ Pr[T_{i,k} = l] &= \textstyle\sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot Pr[T_{j,k} = l - 1] \quad (l > 0) \end{aligned}$$

Lemma (Rekursionsgleichung für $\Pr[T_{i,k} = l]$)

- $(i = k)$: $Pr[T_{i,i} = 0] = 1$, $Pr[T_{i,i} > 0] = 0$.
- $(i \neq k)$:

$$\begin{aligned} &Pr[T_{i,k} = 0] = 0 \\ &Pr[T_{i,k} = l] = \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot Pr[T_{j,k} = l - 1] \quad (l > 0) \end{aligned}$$

Lemma (Erzeugende Funktion zu $T_{i,k}$)

- *Setze* $G_{i,k}(z) = \sum_{l \geq 0} z^l \cdot Pr[T_{i,k} = l]$.
- *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} &G_{i,i}(z) = 1 \\ &G_{i,k}(z) = z \cdot \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot G_{j,k}(z) \quad (i \neq k). \end{aligned}$$

Bew.:

Einfach Einsetzen (vgl. Übungen).

Lemma (Rekursionsgleichung für $\Pr[T_{i,k} = l]$)

- $(i = k)$: $Pr[T_{i,i} = 0] = 1$, $Pr[T_{i,i} > 0] = 0$.
- $(i \neq k)$:

$$Pr[T_{i,k} = 0] = 0$$
$$Pr[T_{i,k} = l] = \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot Pr[T_{j,k} = l - 1] \quad (l > 0)$$

Lemma (Erzeugende Funktion zu $T_{i,k}$)

- *Setze* $G_{i,k}(z) = \sum_{l \geq 0} z^l \cdot Pr[T_{i,k} = l]$.
- *Dann gilt:*

$$G_{i,i}(z) = 1$$
$$G_{i,k}(z) = z \cdot \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot G_{j,k}(z) \quad (i \neq k).$$

Bew.:

Einfach Einsetzen (vgl. Übungen).

Lemma (Rekursionsgleichung für $\Pr[T_{i,k} = l]$)

- $(i = k)$: $Pr[T_{i,i} = 0] = 1$, $Pr[T_{i,i} > 0] = 0$.
- $(i \neq k)$:

$$\begin{aligned} Pr[T_{i,k} = 0] &= 0 \\ Pr[T_{i,k} = l] &= \sum_{j\in[n]} p_{i,j} \cdot Pr[T_{j,k} = l - 1] \quad (l > 0) \end{aligned}$$

Lemma (Erzeugende Funktion zu $T_{i,k}$)

- *Setze* $G_{i,k}(z) = \sum_{l\geq 0} z^l \cdot Pr[T_{i,k} = l]$.
- *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} G_{i,i}(z) &= 1 \\ G_{i,k}(z) &= z \cdot \sum_{j\in[n]} p_{i,j} \cdot G_{j,k}(z) \quad (i \neq k). \end{aligned}$$

Bew.:

Einfach Einsetzen (vgl. Übungen).

Lemma (Erzeugende Funktion zu $T_{i,k}$)

Mit $G_{i,k}(z) = \sum_{l \geq 0} z^l \cdot Pr[T_{i,k} = l]$ *gilt:*

$$G_{i,i}(z) = 1$$
$$G_{i,k}(z) = z \cdot \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot G_{j,k}(z) \quad (i \neq k).$$

Korollar 1:

- $f_{i,k} := \Pr[T_{i,k} < \infty]$ bezeichne die W'keit, k irgendwann von i aus zu erreichen.
- Es gilt: $f_{i,k} = \Pr[T_{i,k} < \infty] = \sum_{l \geq 0} \Pr[T_{i,k} = l] = G_{i,k}(1)$ und

$$f_{i,i} = 1$$
$$f_{i,k} = \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot f_{j,k} \quad (i \neq k)$$

Bew.:

Gleichung für $G_{i,k}$ bei $z = 1$ auswerten.

Lemma (Erzeugende Funktion zu $T_{i,k}$)

Mit $G_{i,k}(z) = \sum_{l \geq 0} z^l \cdot Pr[T_{i,k} = l]$ *gilt:*

$$G_{i,i}(z) = 1$$
$$G_{i,k}(z) = z \cdot \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot G_{j,k}(z) \quad (i \neq k).$$

Korollar 2:

- $h_{i,k} := \mathbb{E}[T_{i,k}]$ bezeichne die mittlere Übergangszeit von i nach k.
- Annahme: $\mathbb{E}[T_{i,k}]$ existiert $(\mathbb{E}[T_{i,j}] < \infty)$.
- Es gilt: $h_{i,k} = \sum_{l \geq 0} l \cdot \Pr[T_{i,k} = l] = G'_{i,k}(1)$
  und
  $$h_{i,i} = 0$$
  $$h_{i,k} = 1 + \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot h_{j,k} \quad (i \neq k)$$

Bew.:

- Beachte: Da $\mathbb{E}[T_{i,k}] < \infty$ angenommen, muss $G_{i,k}(1) = 1$ gelten (Warum?).
- Gleichung für $G_{i,k}$ ableiten und bei $z = 1$ auswerten.

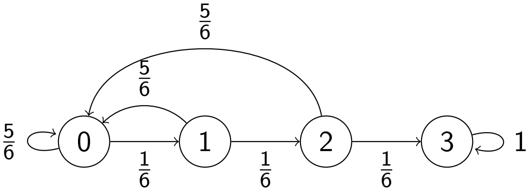
Lemma (Erzeugende Funktion zu $T_{i,k}$)

Mit $G_{i,k}(z) = \sum_{l \geq 0} z^l \cdot Pr[T_{i,k} = l]$ *gilt:*

$$G_{i,i}(z) = 1$$
$$G_{i,k}(z) = z \cdot \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot G_{j,k}(z) \quad (i \neq k).$$

Bsp.: Drei „6“en

$$\begin{aligned} G_{0,3}(z) &= z \cdot \tfrac{5}{6} \cdot G_{0,3}(z) + z \cdot \tfrac{1}{6} \cdot G_{1,3}(z) \\ G_{1,3}(z) &= z \cdot \tfrac{5}{6} \cdot G_{0,3}(z) + z \cdot \tfrac{1}{6} \cdot G_{2,3}(z) \\ G_{2,3}(z) &= z \cdot \tfrac{1}{6} + z \cdot \tfrac{5}{6} \cdot G_{0,3}(z). \end{aligned}$$



Lemma (Erzeugende Funktion zu $T_{i,k}$)

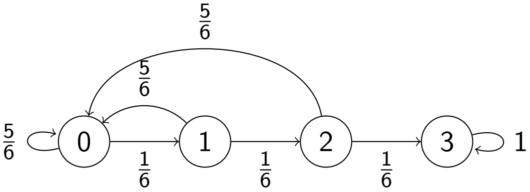
Mit $G_{i,k}(z) = \sum_{l \geq 0} z^l \cdot Pr[T_{i,k} = l]$ *gilt:*

$$G_{i,i}(z) = 1$$
$$G_{i,k}(z) = z \cdot \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot G_{j,k}(z) \quad (i \neq k).$$

Bsp.: Drei „6“en

Einsetzen von $G_{2,3}$ in $G_{1,3}$ und dann von $G_{1,3}$ in $G_{0,3}$ ergibt:

$$G_{0,3}(z) = \frac{1}{216} \cdot z^3 + \frac{5}{6} \cdot z \cdot G_{0,3}(z) + \frac{5}{36} \cdot z^2 \cdot G_{0,3}(z) + \frac{5}{216} \cdot z^3 \cdot G_{0,3}(z).$$



Lemma (Erzeugende Funktion zu $T_{i,k}$)

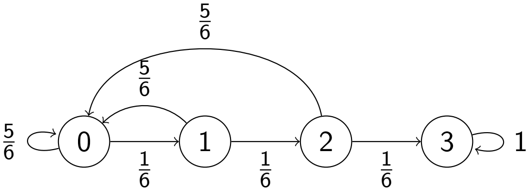
Mit $G_{i,k}(z) = \sum_{l \geq 0} z^l \cdot Pr[T_{i,k} = l]$ *gilt:*

$$G_{i,i}(z) = 1$$
$$G_{i,k}(z) = z \cdot \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot G_{j,k}(z) \quad (i \neq k).$$

Bsp.: Drei „6“en

Auflösen nach $G_{0,3}(z)$:

$$G_{0,3}(z) = \frac{\frac{1}{216} \cdot z^3}{1 - \frac{5}{6} \cdot z - \frac{5}{36} \cdot z^2 - \frac{5}{216} \cdot z^3} = \frac{z^3}{216 - 180z - 30z^2 - 5z^3}.$$



Lemma (Erzeugende Funktion zu $T_{i,k}$)

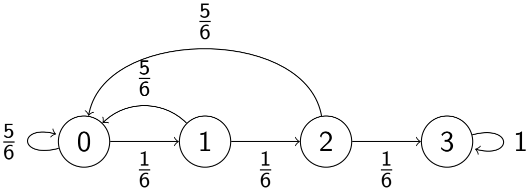
Mit $G_{i,k}(z) = \sum_{l \geq 0} z^l \cdot Pr[T_{i,k} = l]$ *gilt:*

$$G_{i,i}(z) = 1$$
$$G_{i,k}(z) = z \cdot \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot G_{j,k}(z) \quad (i \neq k).$$

Bsp.: Drei „6“en

Damit

$$f_{0,3} = \Pr[T_{0,3} < \infty] = G_{0,3}(1) = \frac{1}{216 - 180 - 30 - 5} = 1.$$



Lemma (Erzeugende Funktion zu $T_{i,k}$)

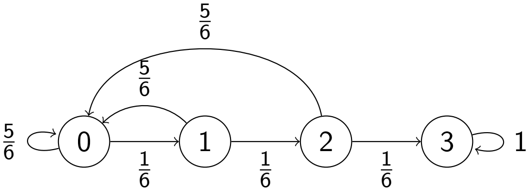
Mit $G_{i,k}(z) = \sum_{l \geq 0} z^l \cdot Pr[T_{i,k} = l]$ *gilt:*

$$G_{i,i}(z) = 1$$
$$G_{i,k}(z) = z \cdot \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot G_{j,k}(z) \quad (i \neq k).$$

Bsp.: Drei „6“en

Ableiten liefert (da $f_{0,3} = G_{0,3}(1) = 1$):

$$h_{0,3} = \mathbb{E}\left[T_{0,3}\right] = G'_{0,3}(1) = 258.$$

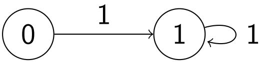


Definition (Rückkehrzeit)

- ZV T_i zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man i das erste Mal wieder besucht.
- $T_i := \infty$, falls i nie wieder besucht wird.

Beachte:

- $\Pr[T_{i,i} = 0] = 1$, aber $\Pr[T_i = 0] = 0$.
- Insbesondere kann $\Pr[T_i = \infty] = 1$ gelten.



Definition (Rückkehrzeit)

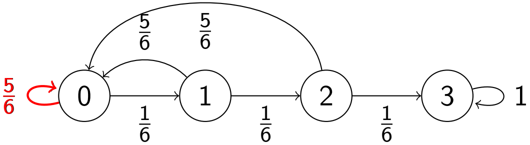
- ZV T_i zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man i das erste Mal wieder besucht.
- $T_i := \infty$, falls i nie wieder besucht wird.

Fakt:

$\Pr[T_i = l]$ entspricht Gewicht aller Pfade der Länge l von i nach i, wobei i genau zweimal besucht wird.

Bsp.:

$$\Pr[T_0 = 1] = \frac{5}{6} \qquad \Pr[T_0 = 2] = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$$
$$\Pr[T_0 = 3] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \qquad \Pr[T_0 = \infty] = \frac{1}{6^3} = 1 - \Pr[T_0 \leq 3].$$



Definition (Rückkehrzeit)

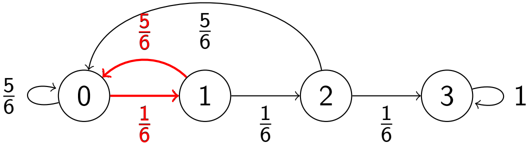
- ZV T_i zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man i das erste Mal wieder besucht.
- $T_i := \infty$, falls i nie wieder besucht wird.

Fakt:

$\Pr[T_i = l]$ entspricht Gewicht aller Pfade der Länge l von i nach i, wobei i genau zweimal besucht wird.

Bsp.:

$$\Pr[T_0 = 1] = \frac{5}{6} \qquad \Pr[T_0 = 2] = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$$
$$\Pr[T_0 = 3] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \qquad \Pr[T_0 = \infty] = \frac{1}{6^3} = 1 - \Pr[T_0 \leq 3].$$



Definition (Rückkehrzeit)

- ZV T_i zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man i das erste Mal wieder besucht.
- $T_i := \infty$, falls i nie wieder besucht wird.

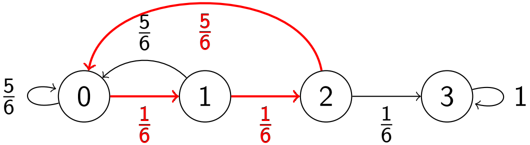
Fakt:

$\Pr[T_i = l]$ entspricht Gewicht aller Pfade der Länge l von i nach i, wobei i genau zweimal besucht wird.

Bsp.:

$\Pr[T_0 = 1] = \frac{5}{6}$ $\qquad$ $\Pr[T_0 = 2] = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$

$\Pr[T_0 = 3] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$ $\qquad$ $\Pr[T_0 = \infty] = \frac{1}{6^3} = 1 - \Pr[T_0 \leq 3]$.



Definition (Rückkehrzeit)

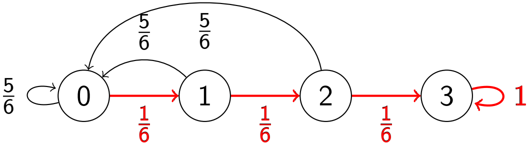
- ZV T_i zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man i das erste Mal wieder besucht.
- $T_i := \infty$, falls i nie wieder besucht wird.

Fakt:

$\Pr[T_i = l]$ entspricht Gewicht aller Pfade der Länge l von i nach i, wobei i genau zweimal besucht wird.

Bsp.:

$$\Pr[T_0 = 1] = \frac{5}{6} \qquad \Pr[T_0 = 2] = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$$
$$\Pr[T_0 = 3] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \qquad \Pr[T_0 = \infty] = \frac{1}{6^3} = 1 - \Pr[T_0 \le 3].$$



Definition (Rückkehrzeit)

- ZV T_i zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man i das erste Mal wieder besucht.
- $T_i := \infty$, falls i nie wieder besucht wird.

Fakt:

$\Pr[T_i = l]$ entspricht Gewicht aller Pfade der Länge l von i nach i, wobei i genau zweimal besucht wird.

Lemma (Rekursionsgleichung für $\Pr[T_i = l]$)

$$Pr[T_i = 0] = 0$$
$$Pr[T_i = l] = \sum_{j\in[n]} p_{i,j} \cdot Pr[T_{j,i} = l-1] \quad (l > 0)$$

Bew.:

- Analog zu $T_{i,k}$.
- Beachte: für $j = i$ ist $\Pr[T_{j,i} = l-1] = \Pr[T_{i,i} = l-1] = 0$, falls $l > 1$.

Definition (Rückkehrzeit)

- ZV T_i zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man i das erste Mal wieder besucht.
- $T_i := \infty$, falls i nie wieder besucht wird.

Lemma (Rekursionsgleichung für $\Pr[T_i = l]$)

$$\begin{aligned} Pr[T_i = 0] &= 0 \\ Pr[T_i = l] &= \sum_{j\in[n]} p_{i,j} \cdot Pr[T_{j,i} = l-1] \quad (l > 0) \end{aligned}$$

Lemma (Erzeugende Funktion zu T_i)

Mit $G_i(z) := \sum_{l\geq 0} z^l \cdot Pr[T_i = l]$ *folgt* $G_i(z) = z \cdot \sum_{j\in[n]} p_{i,j} \cdot G_{j,i}(z)$.

Bew.:

Einfach einsetzen.

Definition (Rückkehrzeit)

- ZV T_i zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man i das erste Mal wieder besucht.
- $T_i := \infty$, falls i nie wieder besucht wird.

Lemma (Erzeugende Funktion zu T_i)

Mit $G_i(z) := \sum_{l \geq 0} z^l \cdot Pr[T_i = l]$ *folgt* $G_i(z) = z \cdot \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot G_{j,i}(z)$.

Korollar 1:

- $f_i := \Pr[T_i < \infty]$ bezeichne die W'keit von i nach i irgendwann zurückzukehren.
- Es gilt $f_i = G_i(1)$ und $f_i = \sum_{j \in [n]} p_{i,j} f_{j,i}$.

Bew.:

Gleichung für G_i bei $z = 1$ auswerten.

Definition (Rückkehrzeit)

- ZV T_i zählt die Schritte, die man im betrachteten Experimentverlauf beginnend in i braucht, bis man i das erste Mal wieder besucht.
- $T_i := \infty$, falls i nie wieder besucht wird.

Lemma (Erzeugende Funktion zu T_i)

Mit $G_i(z) := \sum_{l \geq 0} z^l \cdot Pr[T_i = l]$ *folgt* $G_i(z) = z \cdot \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot G_{j,i}(z)$.

Korollar 2:

- $h_i := \mathbb{E}[T_i]$ bezeichne die mittlere Rückkehrzeit.
- Annahme: $h_{j,k} = \mathbb{E}[T_{j,k}] < \infty$ für alle j, k.
- Es gilt $h_i = G_i'(1)$ und $h_i = 1 + \sum_{j \in [n]} p_{i,j} h_{j,i}$.

Bew.:

- Beachte: G_i hängt nur von $G_{j,k}$ ab. Nach Annahme gilt $\mathbb{E}[T_{j,k}] < \infty$ und damit auch $G_{j,k}'(1) < \infty$ und $G_{j,k}(1) = 1$.
- Gleichung für G_i ableiten und bei $z = 1$ auswerten.

Gambler's Ruin

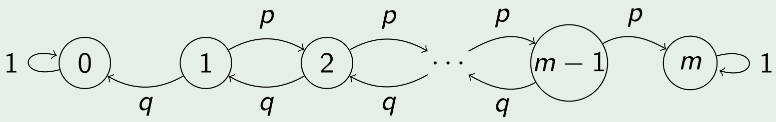
- 2 Spieler A, B mit gemeinsamem Vermögen von m.
- Vermögen von Spieler A sei $k \in \{0, 1, \ldots, m\} = [m+1]$
  - Vermögen von Spieler B: $m - k$
- In jeder Runde (=Zeitschritt) setzen beide Spieler 1 Einheit.
- Spieler A gewinnt mit W'keit p, verliert mit W'keit $q := 1 - p$ in jeder Runde.
- Gewinner einer Runde erhält gesamten Einsatz.
  - In jeder Runde verändert sich Vermögen von A um ± 1.
- Spiel endet, sobald einer der beiden Spieler Vermögen 0 hat.

Gambler's Ruin

- 2 Spieler A, B mit gemeinsamem Vermögen von m.
- Vermögen von Spieler A sei $k \in \{0, 1, \ldots, m\} = [m+1]$
  - Vermögen von Spieler B: $m - k$
- In jeder Runde (=Zeitschritt) setzen beide Spieler 1 Einheit.
- Spieler A gewinnt mit W'keit p, verliert mit W'keit $q := 1 - p$ in jeder Runde.
- Gewinner einer Runde erhält gesamten Einsatz.
  - In jeder Runde verändert sich Vermögen von A um ± 1.
- Spiel endet, sobald einer der beiden Spieler Vermögen 0 hat.

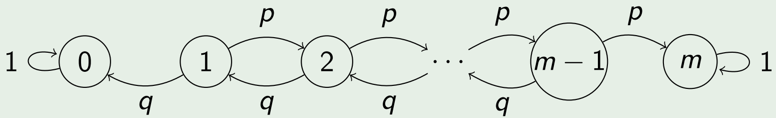
Modellierung als stochastischer Prozess:

- Diskrete Zeit: $T = \mathbb{N}$.
- Zustandsraum: $[m+1] = \{0, 1, \ldots, m\}$
- $X_t \in [m+1]$ gibt Vermögen von Spieler A nach t Runden an.
- Übergangsw'keiten:



Modellierung als stochastischer Prozess: $(q = 1 - p)$

- $X_t \in [m+1]$ gibt Vermögen von Spieler A nach t Runden an.



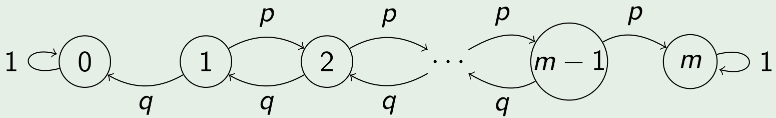
Gesucht:

W'keit, mit der Spieler A mit Startvermögen $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ gewinnt:

$$f_{i,m} = \Pr[T_{i,m} < \infty].$$

Modellierung als stochastischer Prozess: $(q = 1 - p)$

- $X_t \in [m+1]$ gibt Vermögen von Spieler A nach t Runden an.



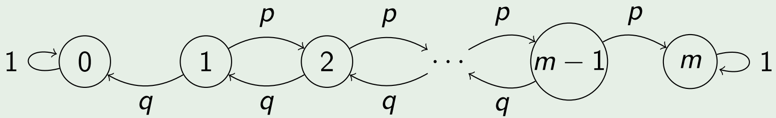
Erinnerung:

Es gilt:

$$f_{i,i} = 1 \text{ und } f_{i,k} = \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot f_{j,k} \quad (i \neq k).$$

Modellierung als stochastischer Prozess: $(q = 1 - p)$

- $X_t \in [m+1]$ gibt Vermögen von Spieler A nach t Runden an.



Erinnerung:

Es gilt:

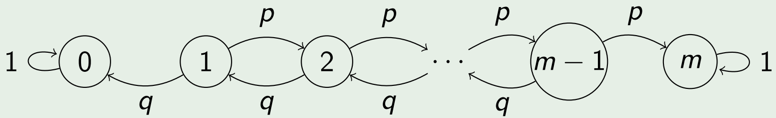
$$f_{i,i} = 1 \text{ und } f_{i,k} = \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot f_{j,k} \quad (i \neq k).$$

$i = 0$:

$$f_{0,m} = p_{0,0} \cdot f_{0,m} = f_{0,m} = \Pr\left[T_{0,m} < \infty\right] = 0.$$

Modellierung als stochastischer Prozess: $(q = 1 - p)$

- $X_t \in [m+1]$ gibt Vermögen von Spieler A nach t Runden an.



Erinnerung:

Es gilt:

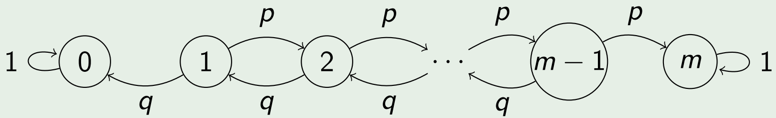
$$f_{i,i} = 1 \text{ und } f_{i,k} = \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot f_{j,k} \quad (i \neq k).$$

$i = 1$:

$$f_{1,m} = p_{1,0} \cdot f_{0,m} + p_{1,2} \cdot f_{2,m} = q \cdot f_{0,m} + p \cdot f_{2,m}.$$

Modellierung als stochastischer Prozess: $(q = 1 - p)$

- $X_t \in [m+1]$ gibt Vermögen von Spieler A nach t Runden an.



Erinnerung:

Es gilt:

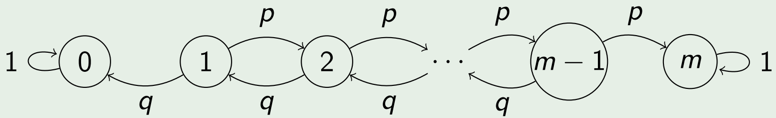
$$f_{i,i} = 1 \text{ und } f_{i,k} = \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot f_{j,k} \quad (i \neq k).$$

$i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$:

$$f_{i,m} = p_{i,i-1} \cdot f_{i-1,m} + p_{i,i+1} \cdot f_{i+1,m} = q \cdot f_{i-1,m} + p \cdot f_{i+1,m}.$$

Modellierung als stochastischer Prozess: ($q = 1 - p$)

- $X_t \in [m+1]$ gibt Vermögen von Spieler A nach t Runden an.



Erinnerung:

Es gilt:

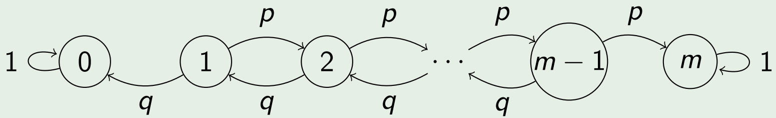
$$f_{i,i} = 1 \text{ und } f_{i,k} = \sum_{j \in [n]} p_{i,j} \cdot f_{j,k} \quad (i \neq k).$$

$i = m$:

$$f_{m,m} = 1.$$

Modellierung als stochastischer Prozess: $(q = 1 - p)$

- $X_t \in [m+1]$ gibt Vermögen von Spieler A nach t Runden an.

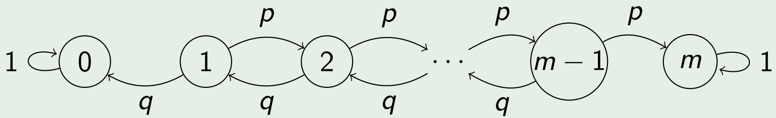


Insgesamt: Rekursionsgleichung für $f_{i,m}$ $(i \in [m+1])$

$$
\begin{aligned}
f_{0,m} &= 0\\
f_{i,m} &= q \cdot f_{i-1,m} + p \cdot f_{i+1,m} \quad (i \in \{1, 2, \ldots, m-1\})\\
f_{m,m} &= 1.
\end{aligned}
$$

Modellierung als stochastischer Prozess: $(q = 1 - p)$

- $X_t \in [m+1]$ gibt Vermögen von Spieler A nach t Runden an.



Bemerkung: Lösung mittels Differenzen $\Delta_i := f_{i,m} - f_{i-1,m}$

- Differenzen müssen (für $p \in (0,1)$; mit $r = p/q$)

$$\Delta_{i+1} = \frac{p}{q}\Delta_i \rightsquigarrow \Delta_{i+1} = \left(\frac{p}{q}\right)^i \Delta_1 = r^i \Delta_1$$

und

$$1 = f_{m,m} = f_{0,m} + \sum_{i=1}^{m} \Delta_i = \Delta_1 \cdot \sum_{i=1}^{m} r^{i-1} = \begin{cases} \Delta_1 \cdot (m-1) & (p = q) \\ \Delta_1 \cdot \frac{1-r^m}{1-r} & (p \neq q) \end{cases}$$

erfüllen.