Aufgabe 1.1

(a) Zeichnen Sie einen einfachen Graphen mit der Gradsequenz $(1, 2, 2, 2, 3, 4)$.

(b) Ist jeder einfache Graph mit der Gradsequenz $(1, 2, 2, 2, 3, 4)$ zusammenhängend?

(c) Hat jeder einfache Graph mit der Gradsequenz $(1, 2, 2, 2, 3, 4)$ einen Eulerkreis?

(d) Hat jeder einfache Graph mit der Gradsequenz $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 4)$ einen Eulerkreis?

(e) Gibt es einen Baum mit der Gradsequenz $(1, 1, 2, 2, 2, 2)$?

(f) Gibt es einen einfachen Graphen mit der Gradsequenz $(1, 1, 2, 2, 4, 4)$, der kreisfrei ist?

(g) Gibt es einen einfachen Graphen mit der Gradsequenz $(4, 4, 5, 5, 5, 5)$, der planar ist?

(h) Ist jeder einfache Graph mit der Gradsequenz $(2, 3, 3, 3, 4, 5)$ 4-färbbar?

Aufgabe 1.2

Gegeben sind die folgenden aussagenlogischen Formeln F, G, H über den Variablen u, w, y, z:

$$F = (G \leftrightarrow H) \qquad G = ((y \vee w) \leftrightarrow \neg u) \qquad H = ((z \oplus w) \leftrightarrow u)$$

Hinweis: Wir benützen $\oplus$ als Symbol für das exklusive Oder (xor).

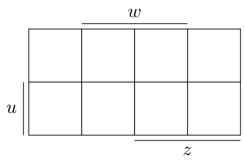
(a) Zeichnen Sie den Syntaxbaum von F. Es ist die Darstellung aus der Vorlesung verlangt.

(b) Stellen Sie den Wahrheitswerteverlauf von G entsprechend der Vorlesung dar.

Sollte sich der Wahrheitswert einer Teilformel für eine gegebene minimale Belegung bereits eindeutig aus dem Wahrheitswert ihrer linken Teilformel ergeben, so muss die rechte Teilformel nicht ausgewertet werden.

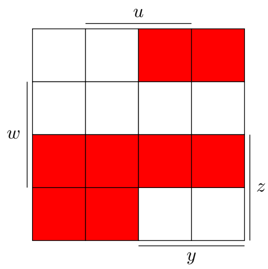
Verwenden Sie als Tabellenkopf die folgenden Vorlagen: $u \quad w \quad y \mid ((y \quad \vee \quad w) \quad \leftrightarrow \quad \neg \quad u)$

(c) Stellen Sie für H das zugehörige KV-Diagramm auf. Übertragen Sie hierfür die folgende Vorlage auf Ihren Antwortbogen:



(d) Geben Sie eine zu F semantisch äquivalente Formel K_F in KNF an, sodass K_F nicht aus mehr als 3 Klauseln besteht.

Sie dürfen hierfür das folgende KV-Diagramm für F zu Grunde legen:



Aufgabe 1.3

Gegeben ist die folgende aussagenlogische Formel F in den Variablen p, q, t, u, y in Klauselmengendarstellung:

$$\{\{u\}, \{p, \neg y\}, \{y, \neg t, \neg u, \neg q\}, \{\neg y, \neg q\}, \{y, p, \neg t, \neg u\}, \{y, q, \neg p\}, \{t\}, \{q, \neg t, \neg y, \neg u, \neg p\}\}$$

Protokollieren Sie schriftlich oder graphisch entsprechend den Übungen den Verlauf des DPLL-Algorithmus angewandt auf F.

Halten Sie sich strikt an das Verfahren aus den Folien der Vorlesung, u.a. bedeutet dies, dass OLR und PLR bezüglich der lexikographischen Variablenordnung verwendet werden müssen, und dass im Fall einer Fallunterscheidung stets zuerst geprüft werden soll, ob eine Variable auf `true` gesetzt werden kann.

Aufgabe 1.4

Eine Urne enthält $n = 24$ Bälle, die mit den Zahlen $[n] = \{1, 2, \ldots, 24\}$ beschriftet sind.

Es werden $k = 6$ Bälle gezogen ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

(a) Sei A die Menge der Ziehungen mit höchstens einer geraden Zahl.

Es gilt z.B. $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}, \{1, 3, 5, 6, 7, 9\} \in A$ und $\{2, 3, 5, 7, 8, 9\} \notin A$.

Berechnen Sie $|A|$.

(b) Sei B die Menge der Ziehungen, in denen die längste Kette von konsekutiven Zahlen genau Länge $l = 4$ hat.

Es gilt z.B. $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}, \{18, 19, 20, 21, 23, 24\} \in B$ und $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}, \{18, 19, 20, 21, 22, 24\} \notin B$.

Berechnen Sie $|B|$.

(c) Sei C die Menge der Ziehungen, die die 1 und die 24 enthalten und in denen keine zwei konsekutiven Zahlen vorkommen.

Es gilt z.B. $\{1, 3, 5, 7, 9, 24\}, \{1, 3, 6, 9, 12, 24\} \in C$ und $\{2, 4, 6, 8, 10, 24\}, \{1, 9, 10, 11, 12, 24\} \notin C$.

Berechnen Sie $|C|$.

Hinweis: Jede solche Ziehung partitioniert die nicht gezogenen Zahlen in genau 5 nichtleere Mengen.

Alle Ergebnisse müssen in Dezimaldarstellung angegeben werden!

Aufgabe 1.5

Gegeben ist die Primzahl $p = 71$. Wir benützen im Folgenden $\cdot_n$ um die Multiplikation modulo einer natürlichen Zahl n zu beschreiben.

(a) Zeigen Sie, dass $g = 69$ ein Erzeuger von $\langle \mathbb{Z}_p^*, \cdot_p, 1\rangle$ ist.

(b) Tabellieren Sie den erweiterten euklidischen Algorithmus für $\mathsf{ggT}(19, 70)$ entsprechend der Vorlesung.

(c) Bestimmen Sie $((20)^{59})^{19} \bmod p$.

(d) Bestimmen Sie die Anzahl der Erzeuger von $\langle \mathbb{Z}_p^*, \cdot_p, 1\rangle$.

(e) Wir betrachten den gerichteten Graphen $G = \left(\mathbb{Z}_p^*, \{(x, x \cdot_p g) \mid x \in \mathbb{Z}_p^*\}\right)$. D.h. $\mathbb{Z}_p^*$ ist die Knotenmenge von G, wobei es eine Kante von x nach y genau dann gibt, wenn $y = x \cdot_p g$ gilt. Bestimmen Sie die Anzahl der Automorphismen des Graphen G.

Aufgabe 1.6

Wir definieren die Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ wie folgt:

$$a_0 = 3,\ a_1 = 2,\ \text{ und allgemein für } i \in \mathbb{N}_0\ \ a_{i+2} = 2 \cdot a_{i+1} + 48 \cdot a_i$$

Zeigen Sie mittels Induktion nach $i \in \mathbb{N}_0$, dass für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$a_i = \frac{20 \cdot 8^i + 22 \cdot (-6)^i}{14}$$

Gliedern Sie den Induktionsbeweis entsprechend den Hausaufgaben.

Aufgabe 1.7

(a) Sei $a = 373065, b = 746130, c = 13$. Berechnen Sie ganze Zahlen α, β, γ mit $\mathsf{ggT}(a, b, c) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c$.

(b) Sei $A = \{a, b, c, d\}$.

Geben Sie eine kleinste Relation R_{min} mit $R^*_{\text{min}} = A \times A$ an. Formal: für alle R mit $R^* = A \times A$ gilt $|R_{\text{min}}| \leq |R|$.

Geben Sie eine größte Relation R_{max} mit $R^*_{\text{max}} \neq A \times A$. Formal: für alle R mit $R^* \neq A \times A$ gilt $|R_{\text{max}}| \geq |R|$.

(c) Sei A eine Menge mit 5 Elementen.

Bestimmen Sie die Anzahl der Äquivalenzrelationen $R \subseteq A \times A$ mit genau drei Äquivalenzklassen.

Hinweis: Zerlegen Sie die Menge der Äquivalenzrelationen Anhand der Größe $K = 2, 3$ der größten Äquivalenzklasse.

(d) Zeigen Sie: Alle einfachen Graphen mit höchstens 8 Kanten sind planar.

(e) Seien A und B disjunkte Mengen mit jeweils n Elementen.

Sei F die Menge aller Funktionen $f\colon A \to (A \cup B)$.

Sei G die Menge aller Funktionen $g\colon (A \cup B) \to (A \times B)$.

Bestimmen Sie die Kardinalitäten $|F \times F|$ und $|G|$ speziell für $n = 3$.

Bestimmen Sie den Wert von n, für den gilt $\left(\frac{|G|}{|F \times F|}\right)^{\frac{1}{|A|}} = 141376$.

(f) Zeichnen Sie **bis auf Isomorphie** jeden Baum mit genau 5 Knoten **genau einmal**.

(g) Zeigen Sie explizit, dass weder $\langle \mathbb{Z}_{20}, \cdot_{20}, 0 \rangle$ noch $\langle \mathbb{Z}_{20} \setminus \{0\}, \cdot_{20}, 1 \rangle$ Gruppen sind.