# Diskrete Strukturen – Klausur 14.02.2018

*Beachten Sie:* Soweit nicht anders angegeben, ist stets eine Begründung bzw. der Rechenweg anzugeben!

## Aufgabe 1 **5P**

Gegeben sind die beiden folgenden aussagenlogischen Formeln $F_1$ und $F_2$:

$$F_1 := (p \oplus r) \land (q \to (p \land r)) \qquad F_2 := p \to (q \leftrightarrow r)$$

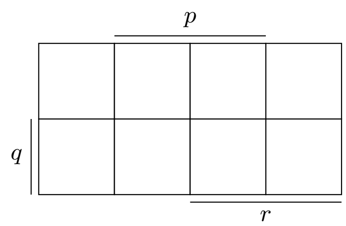
(a) Zeichnen Sie zu beiden Formeln den zugehörigen Syntaxbaum.

(b) Tabellieren Sie beide Formeln entsprechend der Vorlesung in Wahrheitstabellen. Halten Sie sich strikt an das folgende Format (sonst Punktabzug bzw. 0 Punkte):

| $p$ | $q$ | $r$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $\dots$ |
| 0 | 0 | 1 | $\dots$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |

Entsprechend den Übungen reicht es in jeder Zeile für jede Teilformel $H$, nur ihre linke Teilformel auszuwerten, falls sich der Wahrheitswert von $H$ hierdurch bereits eindeutig ergibt.

(c) Stellen Sie sowohl $F_1$ als auch $F_2$ als KV-Diagramme dar. Halten Sie sich strikt an das folgende Format (sonst Punktabzug bzw. 0 Punkte):




(d) Überführen Sie $F_1$ nur unter Verwendung semantischer Äquivalenzen entsprechend dem Verfahren aus der Vorlesung in eine semantisch äquivalente Formel in KNF.

Neben Kommutativität, Assoziativität und Distributivität von $\land$ und $\lor$, den Regeln nach de Morgan und das Entfernen von Doppelnegationen dürfen nur die folgenden Äquivalenzen benutzt werden:

$$F \to G \equiv \neg F \lor G \qquad F \leftrightarrow G \equiv (F \lor \neg G) \land (\neg F \lor G) \qquad F \oplus G \equiv (F \lor G) \land \neg(F \land G)$$

(e) Stellen Sie eine zu $F_2$ erfüllbarkeitsäquivalente Formel $F_2'$ in KNF auf, indem Sie entsprechend der Vorlesung geeignet Hilfsvariablen einführen.

Zeigen Sie explizit, dass $F_3 := (F_2 \leftrightarrow F_2')$ erfüllbar, aber nicht gültig ist.

*Erinnerung*: In der Vorlesung und den Übungen haben Sie folgende Äquivalenzen hergeleitet:

$$(A \leftrightarrow (B \to C)) \equiv (A \lor B) \land (A \lor \neg C) \land (\neg A \lor \neg B \lor C)$$

und

$$(A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)) \equiv (A \lor B \lor C) \land (\neg A \lor B \lor \neg C) \land (\neg A \lor \neg B \lor C) \land (A \lor \neg B \lor \neg C)$$

## Aufgabe 2 **3P**

Verwenden Sie aussagenlogische Resolution, um zu entscheiden, ob folgende Klauselmenge unerfüllbar ist.

$$\{\{p, \neg r\}, \{p, \neg q\}, \{r, q\}, \{\neg r, \neg q\}, \{q, \neg p\}, \{r, \neg q, \neg p\}, \{r, q, p\}\}$$

Sollte sich die leere Klausel ableiten lassen, reicht es, eine Resolution graphisch entsprechend der Vorlesung darzustellen.

## Aufgabe 3 **4P**

Sei $\mathcal{G}$ die Menge der zusammenhängenden planaren Graphen, in denen alle Knoten Grad 3 haben und jede Fläche (auch die äußere Fläche) von genau 5 Kanten umrandet ist.

Zeigen Sie, dass alle Graphen in $\mathcal{G}$ dieselbe Anzahl $\alpha$ an Flächen haben, und bestimmen Sie diese Anzahl $\alpha$.

## Aufgabe 4 **6P**

Begründen Sie jeweils kurz (z.B. durch Angabe eines passenden konkreten Gegenbeispiels oder durch Nennung und Verwendung eines Resultats aus der Vorlesung), ob

(a) **jeder** einfache Graph mit Gradfolge $(3,3,3,3,4,4)$ einen Hamilton-Kreis besitzt.
(b) **jeder** einfache Graph mit Gradfolge $(1,1,1,2,2,2,3)$ ein Baum ist.
(c) **jeder** einfache Graph mit Gradfolge $(2,2,2,2,2,2,6)$ dreifärbbar ist.

Beachten Sie, dass eine Begründung verlangt ist. Ein einfaches „ja“ oder „nein“ wird mit 0 Punkten bewertet. Sie dürfen annehmen, dass jede der genannten Gradfolgen realisierbar ist.

## Aufgabe 5 **6P**

Zum Valentinstag haben Sie $m$ Valentinskarten für Ihre $n$ Lebensabschnittsentitäten gekauft mit $m \geq n$.

Sie sind natürlich daran interessiert, wie viele verschiedene Möglichkeiten es gibt, diese $m$ Karten auf diese $n$ Entitäten zu verteilen (jede Karte kann natürlich nur einmal verwendet werden; wir interessieren uns nur dafür, welche Karte schließlich bei welcher Entität landet).

Geben Sie jeweils einen möglichst einfachen arithmetischen Ausdruck (zzgl. kurzer Begründung) für die Anzahl der Möglichkeiten unter Verwendung der in der Vorlesung eingeführten Zählkoeffizienten (Binomialkoeffizienten, Stirlingzahlen, etc.) an, wenn

(a) jede Entität mindestens eine Karte erhalten soll und alle Karten versendet werden sollen und
  (i) nur Karten unterschieden werden, Entitäten jedoch ununterscheidbar sind.
  (ii) nur Entitäten unterschieden werden, Karten jedoch ununterscheidbar sind.
(b) jede Entität mindestens eine Karte erhalten soll, jedoch nicht alle Karten versendet werden müssen und nur Entitäten unterschieden werden, Karten jedoch ununterscheidbar sind.
(c) jede Entität mindestens zwei Karten erhalten soll und alle Karten versendet werden sollen und nur Karten unterschieden werden, Entitäten jedoch ununterscheidbar sind. Nehmen Sie in diesem Fall an, dass Sie $m = 17$ Valentinskarten für Ihre $n = 7$ Lebensabschnittsentitäten gekauft haben.

*Erinnerung*: In den Übungen haben Sie gesehen, dass die Anzahl der Äquivalenzrelationen über $[N]$, welche genau $\lambda_i$ viele $i$-elementige Äquivalenzklassen besitzen, gerade durch $\frac{N!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_N!(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\cdots(N!)^{\lambda_N}}$ gegeben ist.

## Aufgabe 6 **8P**

Wir betrachten die zyklische Gruppe $\langle \mathbb{Z}_{47}^*, \cdot_{47}, 1\rangle$ mit der Primzahl $p = 47$.

(a) Bestimmen Sie die Ordnung von 2 und 5 in dieser Gruppe.
*Hinweis*: $2^{10} \equiv_p 37$ und $5^{10} \equiv_p 12$
(b) Bestimmen Sie das Inverse von 5 in $\langle \mathbb{Z}_{47}^*, \cdot_{47}, 1\rangle$ mittels des erweiterten Euklidischen Algorithmus (EEA).
Halten Sie sich strikt an das Format aus der Vorlesung, um den EEA zu tabellieren (sonst Punktabzug bzw. 0 Punkte):

| $a$ | $b$ | $\lfloor b/a \rfloor$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|---|
| ... | ... | ... | ... | ... |

(c) Berechnen Sie $113^{90} \bmod 47$.

## Aufgabe 7 **4P**

(a) Sei $P$ ein einstelliges Prädikatensymbol, $a, b$ Konstantensymbole und $f$ ein einstelliges Funktionssymbol.
Seien $F, G$ die folgenden prädikatenlogischen Formeln mit Gleichheit:

$$F := P(a) \wedge \neg P(b) \wedge \forall x(P(x) \leftrightarrow P(f(x))) \qquad G := \forall x \forall y(f(x) = f(y) \to x = y)$$

Geben Sie zwei passende Strukturen $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$ mit unendlichem Universum an, so dass:

$$\mathcal{S} \models F \wedge G \qquad\qquad \mathcal{S}' \models F \wedge \neg G$$

(b) Geben Sie eine prädikatenlogische Formel $H$ mit Gleichheit an, die die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt:
- Für jedes gerade $i \in \mathbb{N}$ gibt es ein Modell von $H$, dessen Universum genau $i$ Elemente hat.
- Für jedes ungerade $i \in \mathbb{N}$ gibt es kein Modell von $H$, dessen Universum genau $i$ Elemente hat.

Geben Sie auch ein Modell $\mathcal{S}$ von $H$ mit $|U_{\mathcal{S}}| = 4$ an.

## Aufgabe 8 **4P**

Wir definieren induktiv die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von natürlichen Zahlen mittels

$$a_0 := 2,\ a_1 := 4,\ a_2 := 7, \text{ und } a_{n+3} := 4a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie durch geeignete Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$a_n = 2^n + n + 1$$