Technische Universität München **Winter 2016/17**
Prof. H. J. Bungartz / Dr. M. Luttenberger, J. Bräckle, K. Röhner

Diskrete Strukturen – Nachholklausur 22.04.2017

Beachten Sie: Soweit nicht anders angegeben, ist stets eine Begründung bzw. der Rechenweg anzugeben!

Aufgabe 1 6P

Gegeben ist die folgende aussagenlogische Formel F in den Variabeln A, B, C:

$$F = \neg(((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \vee \neg C)$$

(a) Überführen Sie F in eine semantisch äquivalente aussagenlogische Formel K_F in KNF unter Verwendung des Verfahrens aus der Vorlesung basierend auf semantischen Äquivalenzen. Es reicht in jedem Schritt des Verfahrens einmal die verwendeten Äquivalenzen anzugeben.

(b) Stellen Sie das KV-Diagramm zu $\neg F$ auf und leiten Sie hiermit eine zu $\neg F$ semantisch äquivalente aussagenlogische Formel $D_{\neg F}$ in DNF her, in welcher höchstens 3 Disjunktionen vorkommen.
Verwenden Sie für das KV-Diagramm folgende Vorlage (**nicht ausfüllen!**):

	$\neg C$	C	C	$\neg C$
$\neg B$	?	?	?	?
B	?	?	?	?
	A	A	$\neg A$	$\neg A$

Aufgabe 2 6P

Gegeben ist die folgende Klauselmenge in den aussagenlogischen Variablen A, B, C:

$$K = \{\{A, C\}, \{\neg A, \neg C\}, \{A, B, \neg C\}, \{\neg A, B, C\}, \{\neg B\}\}$$

(a) Zeigen Sie mittels aussagenlogischer Resolution, dass die Klauselmenge K *unerfüllbar* ist. Es reicht, eine Resolution der leeren Klausel graphisch entsprechend der Vorlesung darzustellen.

(b) Wenden Sie zum Vergleich den DPLL-Algorithmus aus der Vorlesung (mit *one-literal rule*, ohne *pure-literal rule*) auf die Klauselmenge an.
Halten Sie sich an die Literalordnung $A \prec \neg A \prec B \prec \neg B \prec C \prec \neg C$

Aufgabe 3 6P

Die Anzahl A_n der Hanau-Meerschweinchen zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ ist durch folgende Rekursionsgleichung gegeben:

$$A_0 = 2 \quad A_1 = 1 \quad A_2 = 2 \quad A_{n+3} = A_{n+2} - A_{n+1} + A_n$$

Sei $f\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$f(n) := \begin{cases} 2 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2 - (-1)^{\frac{n-1}{2}} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Zeigen Sie mittels geeigneter Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$A_n = f(n)$$

Der Induktionsbeweis muss entsprechend der Vorlesung und den Tutorübungen gegliedert werden!

Aufgabe 4 **4P**

Wir betrachten ein Gewinnspiel, bei dem jedes Los einem 6-Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in [5]^6$ mit Einträgen aus $[5] = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ entspricht. Die *höchste* Zahl, welche *mindestens drei Mal* auf einem gegebenen Los vorkommt, entspricht dem Gewinn; kommt jede Zahl aus [5] höchstens zwei Mal auf dem Los vor, dann ist der Gewinn 0.

Beispiel: Das Los $(2, 3, 4, 3, 5, 3)$ hätte den Gewinn 3, das Los $(1, 2, 3, 4, 5, 5)$ den Gewinn 0.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl aller Lose mit Gewinn 5.

(b) Bestimmen Sie die Anzahl aller Lose mit Gewinn 0.

Hinweis: Es reicht, die gesuchten Zahlenwerte als arithmetische Terme unter Verwendung der in der Vorlesung behandelten kombinatorischen Zählkoeffizienten anzugeben. Die Terme müssen jedoch ausführliche begründet und vereinfacht werden.

Erinnerung: In den Tutorübungen haben Sie gesehen, dass es genau $\frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_n!(1!)^{\lambda_1}(2!)^{\lambda_2}\cdots(n!)^{\lambda_n}}$ Äquivalenzrelationen über $[n]$ mit genau λ_i Äquivalenzklassen der Größe i gibt, falls $\sum_{i=1}^{n} i\lambda_i = n$ gilt.

Aufgabe 5 **3P**

Mit *Graph* sei im Weiteren ein Tupel $G = (V, E)$ mit V eine endliche Menge und $E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{u, v\} \subseteq V \mid u \neq v\}$ gemeint. Wir nehmen weiterhin an, dass die Knoten $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ nach aufsteigendem Knotengrad aufgezählt werden, d.h. $\deg(v_i) \leq \deg(v_j)$ für $1 \leq i < j \leq n$. Dann ist die Gradfolge von G gerade die Sequenz $(\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$.

Begründen Sie jeweils kurz, ob

(a) es einen planaren Graphen mit Gradfolge $(2, 4, 4, 4, 5, 5)$ gibt.

(b) jeder Graph mit Gradfolge $(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4)$ ein Baum ist.

(c) es einen planaren Graph mit Gradfolge $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ gibt, der einen Hamilton-Kreis enthält.

Aufgabe 6 **6P**

In dieser Aufgabe sind wir ausschließlich an Graphen $G = (V, E)$ interessiert, welche *alle* folgenden Eigenschaften besitzen:

- $|V| \geq 2$ ist ein positives Vielfaches von 3 und
- $E \subseteq \binom{V}{2}$ und
- je ein Drittel der Knoten hat den Grad d bzw. $2d$ bzw. $3d$ und
- G ist zusammenhängend und planar.

Zeigen Sie:

(a) Sei F die Menge der Flächen, in die G die Ebene unterteilt (inkl. der umschließenden Fläche).
Dann gilt $|F| = 2 + (d - 1)\,|V|$.

(b) Geben Sie für $|V| = 9$ und $d = 1$ einen solchen Graphen an. Es reicht, den Graphen zu zeichnen.

(c) Zeigen Sie, dass es für $d \notin \{1, 2\}$ *keinen* solchen Graphen geben kann.

Aufgabe 7 **8P**

Sei $N = 32$.

(a) Bestimmen Sie $\varphi(N)$.

(b) Bestimmen Sie die Untergruppen $\langle 3\rangle$, $\langle 29\rangle$ und $\langle 15\rangle$ bzgl. der multiplikativen Gruppe $\langle \mathbb{Z}_N^*, \cdot_N, 1\rangle$ modulo N.

(c) Bestimmen Sie das Inverse von 15 in $\langle \mathbb{Z}_N^*, \cdot_N, 1\rangle$ **mittels des erweiterten euklidischen Algorithmus**.
Hinweis: Halten Sie sich an das in den Übungen und der Vorlesung verwendete Format:

a	b	$\lfloor b/a \rfloor$	α	β
?	?	?	?	?

(d) Geben Sie eine zu $\langle \mathbb{Z}_5^*, \cdot_5, 1\rangle$ isomorphe Untergruppe der $\langle \mathbb{Z}_N^*, \cdot_N, 1\rangle$ an zzgl. entsprechendem Isomorphismus.

Aufgabe 8 **1P**

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie: $\sum_{k=1}^{p-1} k^{p-1} \equiv_p -1$.

Erinnerung: $a \equiv_n b$ gdw. $(a \bmod n) = (b \bmod n)$.