Technische Universität München **Winter 2016/17**
Prof. H. J. Bungartz / Dr. M. Luttenberger, J. Bräckle, K. Röhner

Diskrete Strukturen – Endterm

Beachten Sie: Soweit nicht anders angegeben, ist stets eine Begründung bzw. der Rechenweg anzugeben!

Aufgabe 1 **6P**

Wir betrachten die folgenden Formeln über den aussagenlogischen Variablen A, B, C:

$$F_1 := (\neg A \vee (\neg B \oplus A))$$
$$F_2 := (((B \rightarrow A) \leftrightarrow (B \vee C)) \wedge \neg(C \rightarrow A))$$

(a) Zeichnen Sie zu den Formeln F_1 und F_2 jeweils den entsprechenden Syntaxbaum.

(b) Stellen Sie Wahrheitstabellen für beide Formeln auf.

- Auf die Wiederholung der Wahrheitswerte unter den Variablen der Formel kann verzichtet werden.
- Es müssen Teilformeln nur soweit ausgewertet werden, dass sich der Wahrheitswert der gegebenen Formel eindeutig aus der Wahrheitstabelle ergibt (entsprechend den Tutorübungen).
- Ihre Tabellen müssen dem Format aus den Übungen entsprechen:

A	B	$(\neg A \vee (\neg B \oplus A))$
0	0	?
0	1	?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	?

bzw.

A	B	C	$(((B \rightarrow A) \leftrightarrow (B \vee C)) \wedge \neg(C \rightarrow A))$
0	0	0	?
0	0	1	?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	1	?

(c) Geben Sie zu beiden Formeln jeweils eine möglichst einfache semantisch äquivalente Formel in KNF an.

Aufgabe 2 **5P**

Gegeben sei die folgende aussagenlogische Formel als Klauselmenge:

$$\{\{A, \neg B, \neg C\}, \{A, B, D\}, \{A, \neg C, \neg D\}, \{\neg A, B\}, \{\neg A, \neg B\}\}$$

(a) Wenden Sie den DPLL-Algorithmus aus *den Folien* (mit OLR, aber ohne PLR) an, um eine erfüllende Belegung für obige Formel zu berechnen.

(b) Beschreiben Sie die PLR („pure-literal rule", vgl. Übungsblatt 6) und markieren Sie in Ihrer Lösung zu (a) den ersten Zeitpunkt, in welchem die PLR angewendet werden würde.

Erinnerung: Die OLR hat stets höchste Priorität, die Fallunterscheidung stets niedrigste Priorität.

Beachten Sie: Hat der DPLL-Algorithmus die Wahl zwischen mehreren Literalen, so soll stets das Literal gewählt werden, das bzgl. der Ordnung $\prec$ vor allen anderen zur Auswahl stehenden Literalen kommt, wobei gelten soll:

$$A \prec \neg A \prec B \prec \neg B \prec C \prec \neg C \prec D \prec \neg D$$

Aufgabe 3 **5P**

Die Anzahl A_n der Zwuggelmeerschweinchen zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ ist durch folgende Rekursionsgleichung gegeben:

$$A_0 = 1 \quad A_1 = 2 \quad A_{n+2} = 2A_{n+1} - A_n + 1$$

Zeigen Sie mittels geeigneter Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$A_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

Hinweis: Geben Sie explizit die Induktionsbasis an und gliedern Sie den Induktionsschritt in Induktionsannahme, Induktionsbehauptung und Beweis der Induktionsbehauptung. Werten Sie jeweils linke und rechte Seite unabhängig voneinander aus.

Aufgabe 4 **3P**

Mit *Graph* sei im Weiteren ein Tupel $G = (V, E)$ mit $|V| < \infty$ und $E \subseteq \binom{V}{2}$ gemeint. Wir nehmen weiterhin an, dass die Knoten $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ nach aufsteigendem Knotengrad aufgezählt werden, d.h. $\deg(v_i) \leq \deg(v_j)$ für $1 \leq i < j \leq n$. Dann ist die Gradfolge von G gerade die Sequenz $(\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$.

Begründen Sie jeweils kurz, ob

(a) jeder Graph mit Gradfolge $(2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4)$ einen Euler-Kreis enthält.

(b) es einen planaren zusammenhängenden Graphen mit Gradfolge $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4)$ gibt, der die Ebene in genau 2 (umschließende und eingeschlossene) Flächen unterteilt.

(c) es einen 2-färbbaren Graphen mit Gradfolge $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4, 4, 4, 4, 4)$ (12 Knoten vom Grad 1, 5 Knoten vom Grad 4) gibt.

Aufgabe 5 **6P**

Wir betrachten den Graphen $G_n = (V_n, E_n)$ mit $V_n = 2^{[n]}$ und $E_n = \{\{A, B\} \mid A \subseteq [n], B \subseteq [n], A \cap B = \emptyset, A \neq B\}$.

(a) Zeichnen Sie G_3.

(b) Welchen Grad hat $\emptyset$ in G_n?

(c) Zeigen Sie: Ist A eine k-elementige, nicht leere Teilmenge von $[n]$, dann gilt $\mathsf{deg}(A) = 2^{n-k}$ in G_n.

(d) Bestimmen Sie $|E_n|$. Geben Sie einen möglichst einfachen Ausdruck an.

Hinweis: Sie dürfen für diese Teilaufgabe $3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}$ ohne Beweis verwenden.

(e) Beweisen Sie den Hinweis zu (d), d.h. zeigen Sie, dass $3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}$ für belieibges $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 6 **8P**

(a) Bestimmen Sie $\varphi(83) = |\mathbb{Z}_{83}^*|$. *Hinweis*: 83 ist eine Primzahl.

(b) Berechnen Sie $38 \cdot_{83} 38$.

(c) Zeigen Sie, dass 5 ein Erzeuger von $\langle \mathbb{Z}_{83}^*, \cdot_{83}, 1 \rangle$, d.h. zeigen Sie, dass $\langle 5 \rangle = \mathbb{Z}_{83}^*$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie geeignet, dass $5^{10} \bmod 83 = 11$ gilt (nicht zu zeigen).

(d) Bestimmen Sie das Inverse von 15 in $\langle \mathbb{Z}_{83}^*, \cdot_{83}, 1 \rangle$ mittels des erweiterten euklidischen Algorithmus (EEA).

Hinweis: Halten Sie sich an das in den Übungen und der Vorlesung verwendete Format für die Tabellierung des EEA:

a	b	$\lfloor b/a \rfloor$	α	β
?	?	?	?	?

(e) Berechnen Sie $(264^{245}) \bmod 83$.

Aufgabe 7 **7P**

Wie viele Möglichkeiten gibt es, 42 Studenten 8 Tutoren zuzuordnen, wenn

jedem Tutor mindestens fünf Studenten zugeordnet werden sollen und weiterhin

(a) Studenten *nicht unterschieden* werden,

 (i) Tutoren ebenfalls *nicht unterschieden* werden.

 (ii) Tutoren jedoch *unterschieden* werden.

(b) Studenten *unterschieden* werden,

 (i) Tutoren jedoch *nicht unterschieden* werden.

 (ii) Tutoren ebenfalls *unterschieden* werden.

Erinnerung: In den Tutorübungen haben Sie gesehen, dass die Anzahl aller Äquivalenzrelationen über $[n]$, welche genau λ_i Äquivalenzklassen der Größe i besitzen, gerade durch $\frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \cdots \lambda_n! (1!)^{\lambda_1} (2!)^{\lambda_2} \cdots (n!)^{\lambda_n}}$ gegeben ist.

In (b) reicht es, das Ergebnis als arithmetisch Ausdruck unter Verwendung der in Vorlesung behandelten Zählkoeffizienten anzugeben. Der arithmetische Ausdruck muss jedoch begründet werden!

Für (a) muss entsprechend (b) verfahren werden, es ist aber *zusätzlich* der explizite Zahlenwert anzugeben.