Technische Universität München **Winter 2015/16**
Prof. H. J. Bungartz / Dr. M. Luttenberger, J. Bräckle, C. Uphoff

Diskrete Strukturen – Endterm

Beachten Sie: Soweit nicht anders angegeben, ist stets eine Begründung bzw. der Rechenweg anzugeben!

Aufgabe 1 **2P**

Wir definieren 1*m breite,* 2*m hohe und* 12*cm dicke Holztüren mit Plastikgriffen* (kurz: *HTPG*s). *HTPG*s gibt es in verschiedenen Preisklassen:

- $\emptyset$ ist die einzige *HTPG* der Preisklasse 0.
- X ist eine *HTPG* der Preisklasse $k+1$, wenn
  - jedes $x \in X$ eine *HTPG* der Preisklasse $\leq k$ ist (mit $k \in \mathbb{N}_0$) und
  - es **genau** ein $x \in X$ gibt, das eine *HTPG* der Preisklasse k ist.
- X ist eine *HTPG*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass X eine *HTPG* der Preisklasse k ist; ansonsten gibt es keine weiteren *HTPG*s.

Bestimmen Sie, wie viele *HTPG*s der Preisklassen 1 bis 5 es jeweils gibt. Geben Sie die genauen Zahlenwerte als 2er-Potenz, d.h. in der Form 2^n mit $n \in \mathbb{N}_0$ an.

Aufgabe 2 **je 1P=4P**

Wir betrachten folgende aussagenlogische Formel über den aussagenlogischen Variablen p, q, r:

$$F = (((p \rightarrow q) \wedge \neg(q \leftrightarrow r)) \vee \neg(\neg p \vee \neg\neg q))$$

(a) Geben Sie den Syntaxbaum von F an.

(b) Stellen Sie die *vollständig* ausgefüllte Wahrheitstabelle zu F auf.

Die Spalten für die Belegungen müssen von links nach rechts mit pqr beschriftet sein.

(c) Stellen Sie das KV-Diagramm zu $\neg F$ auf. Halten Sie sich *genau* an folgende Vorlage (nicht auf Aufgabenblatt eintragen!):

	$\neg r$	r	r	$\neg r$
$\neg q$				
q				
	p	p	$\neg p$	$\neg p$

(d) Geben Sie eine aussagenlogische Formel G in KNF mit $G \equiv F$ an.

Aufgabe 3 **3P**

Notation: Ist L ein Literal, so bezeichnet $\overline{L}$ das Literal mit $\overline{L} \equiv \neg L$.

Sei K eine Klauselmenge und L ein Literal, so dass $\overline{L}$ in keiner Klausel aus K vorkommt (kurz: $\forall C \in K\colon \overline{L} \notin C$).

Zeigen Sie unter dieser Voraussetzung:

K ist erfüllbar genau dann, wenn $K' := \{C \mid C \in K \wedge L \notin C\}$ erfüllbar ist.

Aufgabe 4 **2P**

Zeigen Sie, dass folgende Formel F der Prädikatenlogik 1. Stufe erfüllbar, aber nicht gültig ist. Geben Sie hierfür entsprechend zwei passende Strukturen $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$ mit $[F](\mathcal{S}_0) = 0$ und $[F](\mathcal{S}_1) = 1$ und Universum $U_{\mathcal{S}_0} = U_{\mathcal{S}_1} = \{a, b, c\}$ an:

$$F = \forall x \exists y \forall z \Big(P(x, f(z)) \rightarrow \neg P(y, f(y)) \Big)$$

Aufgabe 5 **3P**

Die Anzahl der Panzerkaninchen A_n im Jahr $n \in \mathbb{N}_0$ folgt folgender Gesetzmäßigkeit:

$$A_0 = 2 \qquad A_1 = 6 \qquad A_{n+2} = 4A_{n+1} - 4A_n$$

Zeigen Sie mittels geeigneter Induktion, dass $A_n = 2^n(n+2)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Geben Sie explizit Induktionsbasis und Induktionsschritt an. Unterscheiden Sie weiterhin im Induktionsschritt explizit nach Induktionsannahme, der im Induktionsschritt zu zeigenden Behauptung und deren Beweis.

Aufgabe 6 **2P+2P+2P+3P=9P**

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet bestehend aus drei verschiedenen Zeichen. Für $w \in \Sigma^*$ und $x \in \Sigma$ sei $|w|_x$ die Anzahl der Vorkommen von x in w, z.B. $|abac|_a = 2$. Die Länge von w wird wie üblich mit $|w|$ bezeichnet, z.B. $|abac| = 4$.

Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Wörter, welche folgenden Anforderungen genügen:

(a) $|w| = 11$ **und** stets steht jedes a links von jedem b, **und** jedes b links von jedem c.

(b) $|w| = 7$ **und** $|w|_a \leq |w|_b \leq |w|_c$ **und** stets steht jedes a links von jedem b, **und** jedes b links von jedem c.

(c) $|w| = 5$ **und** $|w|_a \leq |w|_b \leq |w|_c$.

(d) $|w| = 9$ **und** $|w|_a = 5$ **und** das Wort cb kommt in w **nicht** als zusammenhängendes Teilwort vor (z.B. nicht $aaaaacbbb$).

Neben dem Rechenweg sind jeweils die genauen Zahlenwerte verlangt.

Aufgabe 7 **2P**

Sei $d = (d_1, \ldots, d_7) = (1, 2, 2, 2, 3, 4, 4)$.

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus den Übungen einen einfachen ungerichteten Graphen $G = ([7], E)$ mit $\mathsf{deg}(v_i) = d_i$.

Aufgabe 8 **2P+2P+2P+2P=8P**

Mit Graph ist im Folgenden stets ein einfacher ungerichteter Graph gemeint.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Wir nehmen an, dass die Knoten $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ nach aufsteigendem Knotengrad aufgezählt werden, d.h. $\deg(v_i) \leq \deg(v_j)$ für $1 \leq i < j \leq n$. Dann ist die Gradfolge von G gerade die Sequenz $(\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$.

Begründen Sie jeweils,

(a) ob es einen planaren Graphen mit der Gradfolge $(4, 4, 4, 4, 5, 5)$ gibt?

(b) ob jeder zusammenhängende Graph mit Gradfolge $(1, 1, 1, 1, 2, 4)$ ein Baum ist?

(c) ob jeder Graph mit Gradfolge $(3, 3, 3, 3, 4, 4, 4)$ einen Hamiltonkreis enthält?

(d) ob jeder Graph mit Gradfolge $(2, 2, 2)$ eine Euler-Tour enthält?

Aufgabe 9 **2P+2P+2P+1P=7P**

Sei $p = 107 = 2 \cdot 53 + 1$ mit $q = 53$. Sowohl p als auch q sind prim.

(a) Berechnen Sie $5^q \bmod p$ und $3^q \bmod p$.

Hinweise: Es gilt $3^9 \equiv_p 102$, $5^5 \equiv_p 22$, $3^5 \equiv_p 29$ und $22^{10} \equiv_p 101$.

(b) Entscheiden Sie jeweils, ob 3 bzw. 5 ein Erzeuger von $\langle \mathbb{Z}_p^*, \cdot_p, 1 \rangle$ ist.

(c) Bestimmen Sie das multiplikative Inverse von 32 modulo p. Verwenden Sie hierfür den erweiterten euklidischen Algorithmus und protokollieren Sie die Teilergebnisse in einer Tabelle der folgenden Gestalt:

a	b	k	s	t
32	107	…	…	…
…	…	…	…	…

Insbesondere sollte in jeder Zeile stets $0 \leq a < b$, $k = \lfloor b/a \rfloor$ und $\mathsf{ggT}(a, b) = as + bt$ gelten.

(d) Berechnen Sie $32^{105} \bmod p$.