Technische Universität München
Prof. H. J. Bungartz / Dr. M. Luttenberger, J. Bräckle, C. Uphoff

Winter 2015/16

HA-Lösung

Diskrete Strukturen – Nachholklausur

Beachten Sie: Soweit nicht anders angegeben, ist stets eine Begründung bzw. der Rechenweg anzugeben!

Aufgabe 1

1P+2P+2P+2P=7P

Wir betrachten folgende aussagenlogische Formel über den aussagenlogischen Variablen p, q, r, s:

$$F = (((p \lor q) \land \neg(q \to r)) \land (p \lor \neg(s \oplus \neg q)))$$

(a) Geben Sie den Syntaxbaum von F an.

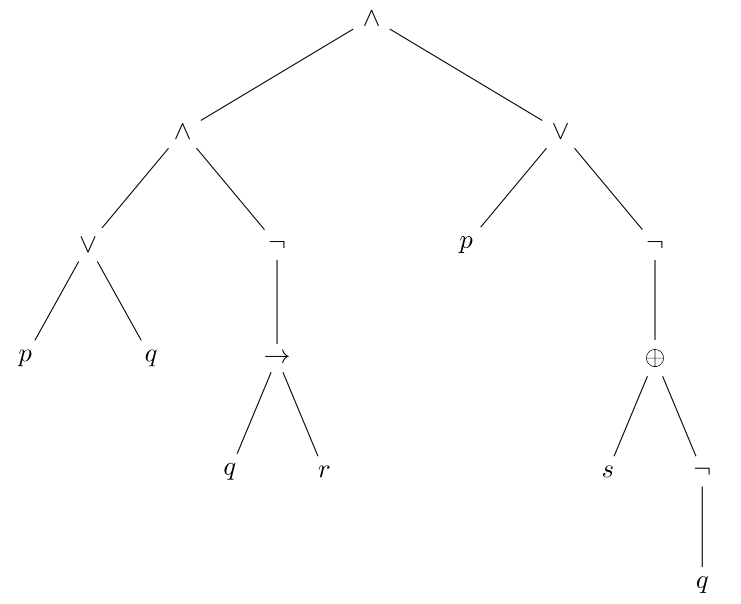
(b) Stellen Sie die Wahrheitstabelle zu F auf.

Die Spalten für die Belegungen müssen von links nach rechts mit $p\,q\,r\,s$ beschriftet sein. Es reicht, die Wahrheitswerte für Teilformeln nur soweit zu bestimmen, dass der Wahrheitswerteverlauf von F eindeutig bestimmt ist. Bis auf diese Ausnahme **muss** die Tabelle dem in der Vorlesung und in den Übungen verwendeten Format entsprechen!

(c) Geben Sie eine aussagenlogische Formel G in **DNF** mit $G \equiv F$ mit einer **minimalen** Anzahl von **Disjunktionen** an.

(d) Geben Sie eine aussagenlogische Formel H in **KNF** mit $H \equiv F$ mit einer **minimalen** Anzahl von **Konjunktionen** an.

Lösung: $(((p \lor q) \land \neg(q \to r)) \land (p \lor \neg(s \oplus \neg q)))$



p	q	r	s	$(((p \lor$	$q) \land$	$\neg$	$(q \rightarrow$	$r)) \land$	$(p \lor$	$\neg$	$(s \oplus$	$\neg\ q)))$
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0

Es empfiehlt sich die Teilformel $\neg(q \rightarrow r)$ auszuwerten, da sich hierdurch die darüberliegenden Konjunktionen (bis auf vier Fälle mit $\beta(q) = 1, \beta(r) = 0$) direkt zu False auswerten lassen.

DNF: $(p \land q \land \neg r) \lor (q \land \neg r \land \neg s)$

KNF: $q \land \neg r \land (p \lor \neg s)$.

Aufgabe 2 — 3P

Der ITE-Operator ist durch $\mathsf{ITE}(p,q,r) := ((p \rightarrow q) \land (\neg p \rightarrow r))$ definiert (p, q, r aussagenlogische Variablen).

Geben Sie eine aussagenlogische Formel $F = \mathsf{ITE}(x_0, G, H)$ an, so dass für jede zu F passende Belegung β gilt:

$$[F](\beta) = 1 \textbf{ gdw. } \Big(\big(\beta(x_0) + 2\beta(x_1)\big)^2 \cdot \big(\beta(y_0) + 2\beta(y_1)\big)\Big) \bmod 4 = \beta(z_0) + 2\beta(z_1)$$

Beachten Sie: In F sollen ausschließlich die aussagenlogischen Variablen $x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1$ vorkommen. Die Teilformeln G, H müssen entsprechend geeignet gewählt werden. Es reicht G und H anzugeben.

Lösung: Sei $x = \beta(x_0) + 2\beta(x_1)$ und entsprechend y und z.

Da man effektiv modulo 4 rechnet, soll man also eine aussagenlogische Formel angeben, die den Werteverlauf von

$$z = x^2 \cdot y \bmod 4$$

beschreibt. Nun gilt modulo 4: $x^2 \equiv_4 0$ für $x \in \{0, 2\}$, was $\beta(x_0) = 0$ entspricht, und $x^2 \equiv_4 1$ für $x \in \{1, 3\}$, was $\beta(x_0) = 1$ entspricht.

Damit folgt:

$$\mathsf{ITE}(x_0, ((y_0 \leftrightarrow z_0) \land (y_1 \leftrightarrow z_1)), (\neg z_0 \land \neg z_1)) \equiv ((\neg x_0 \rightarrow (\neg z_0 \land \neg z_1)) \land (x_0 \rightarrow ((y_0 \leftrightarrow z_0) \land (y_1 \leftrightarrow z_1))))$$

Aufgabe 3 — 4P

Die Anzahl A_n der Paare von Killerkaninchen im Jahr n (mit $n \in \mathbb{N}_0$) folgt folgender Gesetzmäßigkeit:

$$A_0 = 3 \qquad A_1 = 2 \qquad A_2 = 5 \qquad A_{n+3} = 6A_{n+2} - 11A_{n+1} + 6A_n$$

Zeigen Sie mittels Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$A_n = -3/2 \cdot 2^{n+2} + 5/2 \cdot 3^n + 13/2$$

Geben Sie explizit Induktionsbasis und Induktionsschritt an. Unterscheiden Sie weiterhin im Induktionsschritt explizit nach Induktionsannahme, der im Induktionsschritt zu zeigenden Behauptung und deren Beweis.

Lösung: Induktionsbasis: Für $n \in \{0,1,2\}$ soll gelten

$$3 = 4c_2 + c_1 + c_0 \qquad 2 = 8c_2 + 3c_1 + c_0 \qquad 5 = 16c_3 + 9c_2 + c_0$$

Auflösen führt auf $c_1 = 5/2$, $c_2 = -3/2$ und $c_0 = 13/2$

Nach Wahl der Konstanten gilt somit die Induktionsbasis.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig fixiert.

Annahme: Für $m \in \{n, n+1, n+2\}$ gilt $A_m = -3/2 \cdot 2^{m+2} + 5/2 \cdot 3^m + 13/2$.

Zu zeigen: $A_{n+3} = -3/2 \cdot 2^{n+5} + 5/2 \cdot 3^{n+3} + 13/2$

Beweis:

$$\begin{aligned}
A_{n+3} &\overset{\textbf{nDef}}{=} 6A_{n+2} - 11A_{n+1} + 6A_n \\
&\overset{\textbf{IAn}}{=} 6 \cdot (-3/2 \cdot 2^{n+4} + 5/2 \cdot 3^{n+2} + 13/2) \\
&\quad - 11 \cdot (-3/2 \cdot 2^{n+3} + 5/2 \cdot 3^{n+1} + 13/2) \\
&\quad + 6 \cdot (-3/2 \cdot 2^{n+2} + 5/2 \cdot 3^{n} + 13/2) \\
&= -3/2 \cdot 2^{n+5} \cdot (6/2 - 11/4 + 6/8) \\
&\quad + 5/2 \cdot 3^{n+3} \cdot (6/3 - 11/9 + 6/27) \\
&\quad + 13/2 \cdot (6 - 11 + 6) \\
&= -3/2 \cdot 2^{n+5} \cdot (24/8 - 22/8 + 6/8) \\
&\quad + 5/2 \cdot 3^{n+3} \cdot (54/27 - 33/27 + 6/27) \\
&\quad + 13/2 \cdot (6 - 11 + 6) \\
&= -3/2 \cdot 2^{n+5} + 5/2 \cdot 3^{n+3} + 13/2
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 **2P+2P+2P+2P=8P**

Mit Graph ist im Folgenden stets ein endlicher, einfacher, ungerichteter Graph gemeint.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Wir nehmen an, dass die Knoten $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ nach aufsteigendem Knotengrad aufgezählt werden, d.h. $\deg(v_i) \leq \deg(v_j)$ für $1 \leq i < j \leq n$. Dann ist die Gradfolge von G gerade die Sequenz $(\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n))$.

Begründen Sie jeweils,

(a) ob jeder Graph mit Gradfolge $(1,1,2,2,2,2,3,3)$ zusammenhängend ist.

(b) ob alle Graphen mit Gradfolge $(4,4,4,4,4)$ isomorph zueinander sind.

(c) ob es einen vier-färbbaren Graphen mit Gradfolge $(2,2,4,4,4,4,4)$ gibt.

(d) ob jeder Graph mit Gradfolge $(2,2,2,2,2,2)$ ein perfektes Matching besitzt.

Lösung:

(a) nein, z.B. zwei disjunkte Kopien von ab, bc, bd, cd (Kantenrelation als geordnete Tupel).

(b) ja, bei genau 5 Knoten muss jeder Knoten mit jedem anderen verbunden sein, damit jeder Knoten Grad 4 hat, d.h. es muss stets $E = \binom{V}{2}$ mit $|V| = 5$ gelten, also bis auf Isomorphie der K_5.

(c) ja: $ab, ac, bc, bd, be, cd, cf, de, df, ef, eg, fg$

(d) nein, z.B. zwei Kopien des C_3

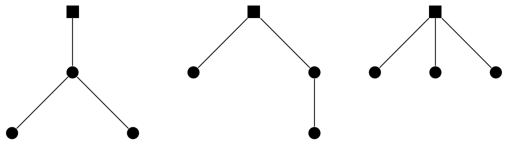
Aufgabe 5 **2P+2P=4P**

Hinweis: Stellen Sie die gesuchten Zahlen als Terme in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ (und $k \in \mathbb{N}$ im Fall von (b)) mittels der Zählkoeffizienten aus der Vorlesung möglichst einfach dar. Begründen Sie genau, wie Sie auf Ihr Ergebnis gekommen sind. Fehlende Begründungen oder zu komplizierte Terme führen zu Punktabzug und ggf. zu 0 Punkten.

(a) Wie viele Wurzelbäume der Höhe ≤ 3 gibt es mit genau $n+1$ Knoten ($n \in \mathbb{N}$), wenn isomorphe Wurzelbäume identifiziert, d.h. nur einmal gezählt werden?

Bemerkung: Nach Vorlesung ist die Höhe eines Wurzelbaums die Länge eines längsten Pfades von der Wurzel zu einem Blatt **plus** 1.

Beispiel: Bis auf Isomorphie gibt es folgende Wurzelbäume der Höhe ≤ 3 mit 4 Knoten (Wurzel als Quadrat):



(b) $S_1, S_2, \ldots, S_n$ bezeichnen $n \in \mathbb{N}$ unterschiedlich große Scheiben: die Scheibe S_j darf auf die Scheibe S_i genau dann gelegt werden, wenn $j < i$ gilt. Es darf immer höchstens eine Scheibe direkt auf einer anderen Scheibe liegen (siehe unten).

Wie viele Möglichkeiten gibt es dann, die n Scheiben zu $k \in \mathbb{N}$ Türmen zu stapeln? Die Reihenfolge der Türme ist egal.

Beispiel: Für $n = 4$ und $k = 2$ gibt es **unter anderem** folgende Möglichkeiten:

Lösung:

(a) Fallunterscheidung nach n:

Für $n > 0$ kann man die Anzahl der Kinder k der Wurzel beliebig aus $[n]$ wählen.

($n = 0$ darf auch weggelassen werden, da nach Aufgabenstellung $n \in \mathbb{N}$.)

Da der Baum höchstens Höhe 3 haben soll, müssen alle verbleibenden $n - k$ Knoten Blätter sein, welche an einem der k Kinder der Wurzel hängen. Da die Bezeichner der Knoten keine Rolle spielen, ist nur die Anzahl $n_1, \ldots, n_k > 0$ an Knoten in jedem der k Teilbäume, welche an der Wurzel hängen, entscheidend, d.h. man muss nur die $n_1, \ldots, n_k$ so wählen, dass $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ mit $n_i > 0$ gilt. Hierfür gibt es $P_{n,k}$ Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es somit $\sum_{k=0}^{n} P_{n,k} = P_{2n,n}$ Wurzelbäume mit $n + 1$ Knoten der Höhe ≤ 2.

Für $n = 0$ gibt es nur eine Möglichkeit: die Wurzel ist auch gleichzeitig das einzige Blatt. Offensichtlich ist somit auch hier die Anzahl durch $P_{0,0} = P_{2n,n} = 1$ gegeben.

(b) $S_{n,k}$: Die Reihenfolge, in der die Boxen ineinander gestapelt werden müssen, ist eindeutig bestimmt, da man stets die nächst größere Box verwenden muss, um die aktuell kleinste Box einzupacken. Damit muss man die n Boxen nur in k (nicht leere) Klassen unterteilen. Die Anzahl der Möglichkeiten hierfür ist gerade durch $S_{n,k}$ gegeben.

Aufgabe 6 — 3P+3P=6P

Sei $p(X) = 1 + X + X^3 + X^4 + X^8$. $p(X)$ ist irreduzibel bzgl. $\mathbb{Z}_2[X]$. Somit ist $\mathbb{Z}_2[X]/p(X)$ ein Körper mit genau 2^8 Elementen.

(a) Bestimmen Sie das Produkt von $X + X^7$ und $1 + X^3 + X^4$ in $\mathbb{Z}_2[X]/p(X)$.

(b) Bestimmen Sie das bzgl. der Multiplikation Inverse von $q(X) = 1 + X + X^3$ in $\mathbb{Z}_2[X]/p(X)$.

Verwenden Sie hierfür den erweiterten Euklidischen Algorithmus und tabellieren Sie alle Rechenschritte entsprechend der Übungen in einer Tabelle der folgenden Gestalt:

$a(X)$	$b(X)$	$k(X)$	$s(X)$	$t(X)$
$1+X+X^3$	$1+X+X^3+X^4+X^8$	...	...	...
...	...	...	...	...

Insbesondere sollte in jeder Zeile stets $\mathsf{grad}(a(X)) < \mathsf{grad}(b(X))$, $b(X) = k(X)a(X) + \Big(b(X) \bmod a(X)\Big)$ und $\mathsf{ggT}(a(X), b(X)) = s(X)a(X) + t(X)b(X)$ gelten, wobei $\mathsf{grad}(\cdot)$ den Grad eines Polynoms angibt.

Lösung:

(a) (überprüfen)

$$(X + X^7) \cdot (1 + X^3 + X^4) = X + X^4 + X^5 + X^7 + X^{10} + X^{11} \equiv_{2,p(X)} X + X^3 + X^5 + X^6 + X^{10} \equiv_{2,p(X)} X + X^2$$

(b)

$a(X)$	$b(X)$	$-k(X)$	$s(X)$	$t(X)$
$1+X^1+X^3$	$1+X^1+X^3+X^4+X^8$	$1+X^2+X^3+X^5$	X^6+X^7	$1+X^1+X^2$
X^2	$1+X^1+X^3$	X^1	$1+X^1+X^2$	$1+X^1$
$1+X^1$	X^2	$1+X^1$	$1+X^1$	1
1	$1+X^1$	$1+X^1$	1	0

Das multiplikative Inverse von $1 + X + X^3$ ist damit durch $X^6 + X^7$ in $\mathbb{Z}_2[X]/p(X)$ gegeben.

Aufgabe 7 **2P+2P=4P**

Sei $f \subseteq A \times B$ eine Relation. Eine Relation ist genau dann eine Funktion, wenn es für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ gibt, sodass $(a, b) \in f$. Weiterhin bezeichne B^A die Menge aller Funktionen $f \subseteq A \times B$. Zeigen Sie:

(a) $B^\emptyset = \{\emptyset\}$.

(b) $\emptyset^A = \emptyset$, wenn $A \neq \emptyset$.

Lösung: Da $f \subset \emptyset \times B = \emptyset$ bzw. $f \subset A \times \emptyset = \emptyset$ ist in beiden Fällen die leere Menge die einzig in Frage kommende Funktion.

(a) Die Menge A ist leer. Damit gibt es kein $a \in A$ und somit auch keine Anforderung an B. Deswegen ist $\emptyset \in B^\emptyset$.

(b) Die Menge A ist nicht leer. Damit müsste es für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ geben. Da B aber leer ist, kann diese Bedingung nie wahr sein und somit gibt es keine solche Funktion.

Aufgabe 8 **2P+2P=4P**

Sie spielen ein Würfelspiel, bei dem Sie gewinnen, wenn Ihr Gegner mit keinem seiner Würfel eine Zahl würfelt, die größer als die größte von Ihnen gewürfelte Zahl ist. Jeder Würfel ist dabei wie üblich mit den Ziffern 1 bis 6 beschriftet.

Beispiel: Sie verwenden 2 Würfel, ihr Gegenspieler 3 Würfel. Ein mögliches Würfelergebnis wäre dann durch $(1, 4, 2, 4, 3)$ beschrieben, wobei die ersten beiden Komponenten die von Ihnen gewürfelten Zahlen angeben, die verbleibenden drei die von Ihrem Gegenspieler gewürfelten Zahlen. In diesem Beispiel hätten Sie gewonnen, da die höchste von Ihnen gewürfelte Zahl eine 4 ist, und Ihr Gegenspieler mit keinem seiner Würfe eine 5 oder 6 erhalten hat.

Geben Sie jeweils die Anzahl der Würfelergebnisse (inkl. Rechenweg und Begründung) an, bei denen Sie gewinnen, wenn

(a) ihr Gegenspieler mit einem, Sie mit zwei Würfeln spielen.

(b) ihr Gegenspieler mit zwei, Sie mit drei Würfeln spielen.

Lösung:

(a) $\left|\{(s_1, s_2, g) \in [6]^3 \mid g \leq \max(s_1, s_2)\}\right| = 6^3 - \left|\{(s_1, s_2, g) \in [6]^3 \mid g > \max(s_1, s_2)\}\right| = 6^3 - \sum_{g=1}^{6}(g-1)^2 = 6^3 - 55 = 161$

Für gegebenes g muss $(s_1, s_2) \in [6]^2 \setminus [g-1]^2$ gelten.

(b) $\left|\{(s_1, s_2, s_3, g_1, g_2) \in [6]^5 \mid \max(g_1, g_2) \leq \max(s_1, s_2, s_3)\}\right| = \sum_{g=1}^{6}(g^2 - (g-1)^2)\left(6^3 - (g-1)^3\right) = 5593$

Für gegebenes $g = \max\{g_1, g_2\}$ muss $(s_1, s_2, s_3) \in [6]^3 \setminus [g-1]^3$ und $(g_1, g_2) \in [g]^2 \setminus [g-1]^2$ gelten.