Technische Universität München **Winter 2015/16**
Prof. H. J. Bungartz / Dr. M. Luttenberger, J. Bräckle, C. Uphoff

HA-Lösung

Diskrete Strukturen – Endterm

Beachten Sie: Soweit nicht anders angegeben, ist stets eine Begründung bzw. der Rechenweg anzugeben!

Aufgabe 1 — 2P

Wir definieren $1m$ *breite,* $2m$ *hohe und* $12cm$ *dicke Holztüren mit Plastikgriffen* (kurz: *HTPG*s). *HTPG*s gibt es in verschiedenen Preisklassen:

- $\emptyset$ ist die einzige *HTPG* der Preisklasse 0.
- X ist eine *HTPG* der Preisklasse $k+1$, wenn
  - jedes $x \in X$ eine *HTPG* der Preisklasse $\leq k$ ist (mit $k \in \mathbb{N}_0$) und
  - es **genau** ein $x \in X$ gibt, das eine *HTPG* der Preisklasse k ist.
- X ist eine *HTPG*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass X eine *HTPG* der Preisklasse k ist; ansonsten gibt es keine weiteren *HTPG*s.

Bestimmen Sie, wie viele *HTPG*s der Preisklassen 1 bis 5 es jeweils gibt. Geben Sie die genauen Zahlenwerte als 2er-Potenz, d.h. in der Form 2^n mit $n \in \mathbb{N}_0$ an.

Lösung: Sei A_k die Anzahl der HTPG der Preisklasse k. Nach Definition gilt $A_0 := 1$.

Im Allgemeinen gilt nun für A_{k+1}, dass man genau eine HTPG der Preisklasse k auswählen muss (A_k Möglichkeiten), und ansonsten aus jeder Preisklasse $j < k$ eine beliebige Teilmenge von HTPGs der Preisklasse j (jeweils 2^{A_j} Möglichkeiten für $j = 0, \ldots, k-1$). Insgesamt somit:

$$A_{k+1} = A_k \cdot 2^{\sum_{j=0}^{k-1} A_j}.$$

Damit ergibt sich $A_1 = 1$, $A_2 = 1 \cdot 2^1 = 2$, $A_3 = 2 \cdot 2^{1+1} = 8$, $A_4 = 8 \cdot 2^{2+1+1} = 2^7 = 128$ und $A_5 = 128 \cdot 2^{8+2+1+1} = 2^{19} = 524288$.

Beispiele:

HTPGs der Preisklasse 0

$$\emptyset$$

HTPGs der Preisklasse 1

$$\{\emptyset\}$$

HTPGs der Preisklasse 2

$$\{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$$

HTPGs der Preisklasse 3

$$\{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\},$$

usw.

Aufgabe 2 — je 1P=4P

Wir betrachten folgende aussagenlogische Formel über den aussagenlogischen Variablen p, q, r:

$$F = (((p \to q) \wedge \neg(q \leftrightarrow r)) \vee \neg(\neg p \vee \neg\neg q))$$

(a) Geben Sie den Syntaxbaum von F an.

(b) Stellen Sie die *vollständig* ausgefüllte Wahrheitstabelle zu F auf.

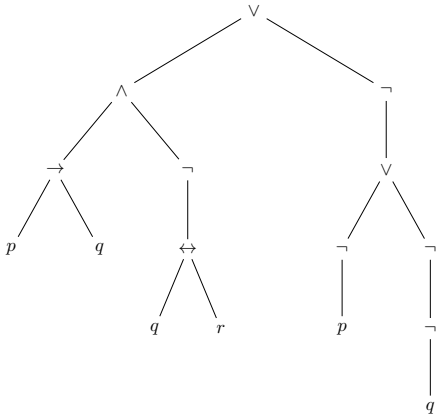
Die Spalten für die Belegungen müssen von links nach rechts mit *pqr* beschriftet sein.

(c) Stellen Sie das KV-Diagramm zu $\neg F$ auf. Halten Sie sich *genau* an folgende Vorlage (nicht auf Aufgabenblatt eintragen!):

	$\neg r$	r	r	$\neg r$
$\neg q$				
q				
	p	p	$\neg p$	$\neg p$

(d) Geben Sie eine aussagenlogische Formel G in KNF mit $G \equiv F$ an.

Lösung: $(((p \to q) \wedge \neg(q \leftrightarrow r)) \vee \neg(\neg p \vee \neg\neg q))$



p	q	r	$(((p$	$\to$	$q)$	$\wedge$	$\neg$	$(q$	$\leftrightarrow$	$r))$	$\vee$	$\neg$	$(\neg$	p	$\vee$	$\neg$	$\neg$	$q))$
0	0	0		1		0	0		1		0	0	1		1	0	1	
0	0	1		1		1	1		0		1	0	1		1	0	1	
0	1	0		1		1	1		0		1	0	1		1	1	0	
0	1	1		1		0	0		1		0	0	1		1	1	0	
1	0	0		0		0	0		1		1	1	0		0	0	1	
1	0	1		0		0	1		0		1	1	0		0	0	1	
1	1	0		1		1	1		0		1	0	0		1	1	0	
1	1	1		1		0	0		1		0	0	0		1	1	0	

	$\neg r$	r	r	$\neg r$
$\neg q$	0	0	0	1
q	0	1	1	0
	p	p	$\neg p$	$\neg p$

KNF zu F: $F \equiv (\neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) =: G$.

Aufgabe 3 — 3P

Notation: Ist L ein Literal, so bezeichnet $\overline{L}$ das Literal mit $\overline{L} \equiv \neg L$.

Sei K eine Klauselmenge und L ein Literal, so dass $\overline{L}$ in keiner Klausel aus K vorkommt (kurz: $\forall C \in K : \overline{L} \notin C$).

Zeigen Sie unter dieser Voraussetzung:

K ist erfüllbar genau dann, wenn $K' := \{C \mid C \in K \wedge L \notin C\}$ erfüllbar ist.

Lösung: Zunächst macht man sich klar, dass

$$K = K' \uplus \{C \in K \mid L \in C\}$$

gilt. Insbesondere gilt somit $K' \subseteq K$. Weiter kommt weder L noch $\overline{L}$ in einer Klausel aus K' vor.

Damit ist K' trivialerweise erfüllbar, wenn K erfüllbar ist: Gilt $\beta \models K$, dann nach Definition der Semantik der Konjunktion $\beta \models C$ für jede Klausel $C \in K$ und damit auch $\beta \models C$ für jede Klausel $C \in K' \subseteq K$, also $\beta \models K'$.

Sei K' erfüllbar und β' eine entsprechende erfüllende Belegung. Erweitert man daher β' zu $\beta := \beta'[L \to 1]$, so bleibt β ein Modell von K', da nur der Wahrheitswert von L umdefiniert wird, welcher für K' keine Rolle spielt, da weder L noch $\overline{L}$ und damit auch nicht die zugehörige Variable in K' auftritt. β ist aber trivialerweise in Modell für jede Klausel aus $\{C \in K \mid L \in C\}$. Damit ist β auch ein Modell von K, d.h. K ist erfüllbar.

Aufgabe 4 **2P**

Zeigen Sie, dass folgende Formel F der Prädikatenlogik 1. Stufe erfüllbar, aber nicht gültig ist. Geben Sie hierfür entsprechend zwei passende Strukturen $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$ mit $[F](\mathcal{S}_0) = 0$ und $[F](\mathcal{S}_1) = 1$ und Universum $U_{\mathcal{S}_0} = U_{\mathcal{S}_1} = \{a, b, c\}$ an:

$$F = \forall x \exists y \forall z \Big(P(x, f(z)) \to \neg P(y, f(y)) \Big)$$

Lösung: Man kann die Formel vereinfachen zu:

$$F \equiv \forall x \exists y \forall z \Big(\neg P(x, f(z)) \vee \neg P(y, f(y)) \Big) \equiv \forall x \forall z \neg P(x, f(z)) \vee \exists y \neg P(y, f(y))$$

(a) $f^{\mathcal{S}_1}(d) := a$, $P^{\mathcal{S}_1} = \{\}$ ist ein Modell.

(b) $f^{\mathcal{S}_0}(d) := d$, $P^{\mathcal{S}_0} = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ ist kein Modell.

Alternativ: Für $P^{\mathcal{S}} = \emptyset$ ist die Hypothese der Implikation stets unerfüllbar, somit die Implikation trivial für jede Wahl von x, y, z erfüllt. Damit ist jede Struktur mit $P^{\mathcal{S}} = \emptyset$ und einer passenden Interpretation von f ein Modell.

Ergibt sich mit $P^{\mathcal{S}} = U_{\mathcal{S}}^2$ und jeder beliebigen passenden Interpretation von f eine passende Struktur, welche kein Modell ist.

Aufgabe 5 **3P**

Die Anzahl der Panzerkaninchen A_n im Jahr $n \in \mathbb{N}_0$ folgt folgender Gesetzmäßigkeit:

$$A_0 = 2 \qquad A_1 = 6 \qquad A_{n+2} = 4A_{n+1} - 4A_n$$

Zeigen Sie mittels geeigneter Induktion, dass $A_n = 2^n(n + 2)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Geben Sie explizit Induktionsbasis und Induktionsschritt an. Unterscheiden Sie weiterhin im Induktionsschritt explizit nach Induktionssannahme, der im Induktionsschritt zu zeigenden Behauptung und deren Beweis.

Lösung: Induktionsbasis $n \in \{0, 1\}$:

Für $n = 0$: $2^n(n + 2) = 2^0(0 + 2) = 2 = A_0$

Für $n = 1$: $2^n(n + 2) = 2^1(1 + 2) = 6 = A_1$

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig fixiert.

Annahme: Für $m \in \{n, n + 1\}$ gilt $A_m = 2^m(m + 2)$.

Zu zeigen: $A_{n+2} = 2^{n+2}(n + 4)$

Beweis:

$$A_{n+2} \overset{\textbf{nDef}}{=} 4A_{n+1} - 4A_n \overset{\textbf{IAn}}{=} 4 \cdot 2^{n+1}(n + 3) - 4 \cdot 2^n(n + 2) = 2^{n+2}(2n + 6 - n - 2) = 2^{n+2}(n + 4)$$

Aufgabe 6 **2P+2P+2P+3P=9P**

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet bestehend aus drei verschiedenen Zeichen. Für $w \in \Sigma^*$ und $x \in \Sigma$ sei $|w|_x$ die Anzahl der Vorkommen von x in w, z.B. $|abac|_a = 2$. Die Länge von w wird wie üblich mit $|w|$ bezeichnet, z.B. $|abac| = 4$.

Bestimmen Sie jeweils die Anzahl der Wörter, welche folgenden Anforderungen genügen:

(a) $|w| = 11$ **und** stets steht jedes a links von jedem b, **und** jedes b links von jedem c.

(b) $|w| = 7$ **und** $|w|_a \leq |w|_b \leq |w|_c$ **und** stets steht jedes a links von jedem b, **und** jedes b links von jedem c.

(c) $|w| = 5$ **und** $|w|_a \leq |w|_b \leq |w|_c$.

(d) $|w| = 9$ **und** $|w|_a = 5$ **und** das Wort cb kommt in w **nicht** als zusammenhängendes Teilwort vor (z.B. nicht *aaaaacbbb*).

Neben dem Rechenweg sind jeweils die genauen Zahlenwerte verlangt.

Lösung:

(a) Jedes solche Wort hat die Form $a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3}$ mit $(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{N}_0^n$ und $k_1+k_2+k_3=11$ oder ist ein beliebiges Wort aus $\{a,c\}^{11}$. Vom ersten Typ gibt es nach VL genau $\binom{11+3-1}{11}=\binom{11+3-1}{3-1}=\frac{13!}{2!11!}=78$ viele. Vom zweiten Typ genau 2^{11}. In beiden Klassen liegen die Wörter der Form a^kc^l mit $k+l=11$, wo von es $\binom{11+2-1}{11}=12$ gibt. Insgesamt gibt es somit $78+2048-12=2114$ solcher Wörter.

(b) Jedes solche Wort hat die Form $a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3}$ mit $(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{N}_0^n$, $k_1\le k_2\le k_3$ und $k_1+k_2+k_3=7$. Jedes Wort ist somit eindeutig mit dem Vektor (k_1,k_2,k_3) (plus Nebenbedingungen) identifiziert. Von diesen gibt es nach VL/TA11.1 genau $P_{7+3,3}=8$ Stück (konkret $(0,0,7),(0,1,6),(0,2,5),(0,3,4),(1,1,5),(1,2,4),(1,3,3),(2,2,3)$ bzw. $P_{7,0}=0$, $P_{7,1}=1$, $P_{7,2}=3$, $P_{7,3}=P_{4,0}+P_{4,1}+P_{4,2}+P_{4,3}=0+1+2+1=4$).

(c) Im Gegensatz zu (b) muss man nicht nur Wörter der Form $a^{k_1}b^{k_2}c^{k_3}$ mit $(k_1,k_2,k_3)\in\mathbb{N}_0^n$, $k_1\le k_2\le k_3$ und $k_1+k_2+k_3=$ const zählen, sondern muss ihre möglichen Anordnungen noch beachten: Ein Vektor (k_1,k_2,k_3) lässt sich dabei zu $\frac{5!}{k_1!k_2!k_3!}$ vielen verschiedenen Wörtern umordnen.

Konkret hat man folgende Vektoren (k_1,k_2,k_3): $(0,0,5)$, $(0,1,4)$, $(0,2,3)$, $(1,1,3)$, $(1,2,2)$ ($P_{8,3}=P_{5,1}+P_{5,2}+P_{5,3}=5$)

Damit erhält man

$$\frac{5!}{5!}+\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{2!2!}=1+5+10+20+30=66$$

Möglichkeiten.

(d) Jedes solche Wort hat die Form $b^{k_1}c^{l_1}ab^{k_2}c^{l_2}ab^{k_3}c^{l_3}ab^{k_4}c^{l_4}ab^{k_5}c^{l_5}ab^{k_6}c^{l_6}$ mit $k_1+l_1+\ldots+k_6+l_6=4$ und $(k_1,\ldots,k_6),(l_1,\ldots,l_6)\in\mathbb{N}_0^6$. Damit muss man die verbleibenden 4 Zeichen auf b und c verteilen, und anschließend die entsprechenden Vektoren wieder zählen. Sei $j=|w|_b=k_1+\ldots+k_6$. Dann:

$$\sum_{j=0}^{4}\binom{j+5}{5}\binom{4-j+5}{5}=\binom{5}{5}\cdot\binom{9}{5}+\binom{6}{5}\cdot\binom{8}{5}+\binom{7}{5}\cdot\binom{7}{5}+\binom{8}{5}\cdot\binom{6}{5}+\binom{9}{5}\cdot\binom{5}{5}=1365$$

Alternative Rechnung:

Wörter der Länge 9 mit genau 5 as: $\binom{9}{5}\cdot 2^4=2016$.

(Wähle Positionen der as, dann die Positionen der bs, Rest sind cs)

Wörter der Länge 9 mit genau 5 as und mind. einmal cb: $\binom{8}{1}\binom{7}{5}2^2=672$ – das stimmt dann noch nicht, da $a^kcba^lcba^n$ doppelt gezählt werden. Muss also um $\binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21$ korrigiert werden.

Insgesamt also: $2016-672+21=1365$.

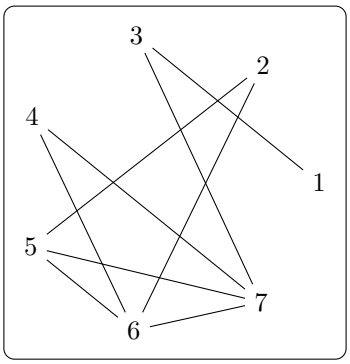
Aufgabe 7 — 2P

Sei $d=(d_1,\ldots,d_7)=(1,2,2,2,3,4,4)$.

Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus den Übungen einen einfachen ungerichteten Graphen $G=([7],E)$ mit $\mathsf{deg}(v_i)=d_i$.

Lösung: Mittels des Algorithmus aus den Tutorübungen erhält man z.B.:

(Die Reduktion der Gradfolge samt Permutationen wird erwartet.)



Aufgabe 8 — 2P+2P+2P+2P=8P

Mit Graph ist im Folgenden stets ein einfacher ungerichteter Graph gemeint.

Sei $G=(V,E)$ ein Graph. Wir nehmen an, dass die Knoten $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ nach aufsteigendem Knotengrad aufgezählt werden, d.h. $\deg(v_i)\le\deg(v_j)$ für $1\le i<j\le n$. Dann ist die Gradfolge von G gerade die Sequenz $(\deg(v_1),\deg(v_2),\ldots,\deg(v_n))$.

Begründen Sie jeweils,

(a) ob es einen planaren Graphen mit der Gradfolge $(4, 4, 4, 4, 5, 5)$ gibt?

(b) ob jeder zusammenhängende Graph mit Gradfolge $(1, 1, 1, 1, 2, 4)$ ein Baum ist?

(c) ob jeder Graph mit Gradfolge $(3, 3, 3, 3, 4, 4, 4)$ einen Hamiltonkreis enthält?

(d) ob jeder Graph mit Gradfolge $(2, 2, 2)$ eine Euler-Tour enthält?

Lösung:

(a) Es gilt $|E| = 13$ und $|V| = 6$, also $|E| > 3|V| - 6$. Somit kann es keinen planaren Graphen mit dieser Gradfolge geben.

(b) Wenn G zusammenhängend sein soll, dann folgt mit $2|E| = \sum d_i = 10 = 2|V| - 2$, dass ein solcher Graph ein Baum sein muss. Dass es überhaupt einen Baum mit dieser Gradfolge gibt, überprüft man leicht.

(c) Nein, z.B. enthaelt der $K_{3,4}$ keinen Hamiltonkreis, siehe TA.

(d) Gibt nur einen Graphen mit dieser Gradfolge, den C_3, und der ist eulersch.

Aufgabe 9 — 2P+2P+2P+1P=7P

Sei $p = 107 = 2 \cdot 53 + 1$ mit $q = 53$. Sowohl p als auch q sind prim.

(a) Berechnen Sie $5^q \bmod p$ und $3^q \bmod p$.

Hinweise: Es gilt $3^9 \equiv_p 102$, $5^5 \equiv_p 22$, $3^5 \equiv_p 29$ und $22^{10} \equiv_p 101$.

(b) Entscheiden Sie jeweils, ob 3 bzw. 5 ein Erzeuger von $\langle \mathbb{Z}_p^*, \cdot_p, 1 \rangle$ ist.

(c) Bestimmen Sie das multiplikative Inverse von 32 modulo p. Verwenden Sie hierfür den erweiterten euklidischen Algorithmus und protokollieren Sie die Teilergebnisse in einer Tabelle der folgenden Gestalt:

a	b	k	s	t
32	107	...	...	...
...	...	...	...	...

Insbesondere sollte in jeder Zeile stets $0 \leq a < b$, $k = \lfloor b/a \rfloor$ und $\mathsf{ggT}(a, b) = as + bt$ gelten.

(d) Berechnen Sie $32^{105} \bmod p$.

Lösung:

(a) $3^{53} = (3^9)^5 \cdot 3^8 \equiv 102^5 \cdot 102/3 \equiv_p (-5)^5 \cdot 34 = -5^5 \cdot 34 \equiv_p -22 \cdot 34 = -748 \equiv_p 1$

$5^{53} = (5^5)^{10} \cdot 5^3 \equiv_p 22^{10} \cdot 125 \equiv_p 101 \cdot 18 \equiv -6 \cdot 18 = -108 \equiv_p -1 \equiv_p 106$.

(b) 3 ist kein Erzeuger, da die Ordnung wegen $3^{53} \equiv_p 1$ höchstens 53 sein kann.

5 ist ein Erzeuger: nach (a) gilt $5^{53} \equiv_p -1$, weiter gilt offensichtlich $5^2 \not\equiv_p 1$, und somit erst $5^{106} \equiv_p 1$, da als mögliche Ordnung von 5 nur die Teiler von 106, also 2 und 53 in Frage kommen.

(c)

a	b	k	s	t
32	107	3	-10	3
11	32	2	3	-1
10	11	1	-1	1
1	10	–	1	0

Damit ist $-10 \equiv_{107} 97$ das multiplikative Inverse von 32 modulo 107.

(d) In jeder endlichen Gruppe gilt $a^{|G|} = 1$ bzw. $a^{|G|-1} = a^{-1}$. Nun ist $|G| = 106$, also folgt $32^{105} \equiv_{107} 32^{-1} \equiv_{107} 97$.