Einführung in die Theoretische Informatik

Tobias Nipkow + Helmut Seidl + Javier Esparza

Fakultät für Informatik
TU München

Sommersemester 2016

Kapitel I Organisatorisches

Siehe https://www7.in.tum.de/um/courses/theo/ss2016

- Vorkenntnisse:
  - Einführung in die Informatik 1
  - Diskrete Strukturen
- Weiterführende Vorlesungen:
  - Automaten, Formale Sprachen, Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit
  - Komplexitätstheorie
  - Logik
  - Compilerbau
  - ...

1. Themen und Ziel der Vorlesung

Themengebiete:

- Berechenbarkeitstheorie
  - Untersuchung der Grenzen, was Rechner prinzipiell können
- Komplexitätstheorie
  - Untersuchung der Grenzen, was Rechner mit begrenzten Ressourcen können
- Automatentheorie
  - Rechner mit endlichem oder kellerartigem Speicher
- Grammatiken
  - Syntax von Programmiersprachen

Geschichte:

1936 Berechenbarkeitstheorie: Church & Turing

1956 Automaten und reguläre Ausdrücke: Kleene

1956 Grammatiken: Chomsky

1971 Komplexitätstheorie: Cook

Gliederung (1. & 2. Semesterhälfte):

1. Automaten und formale Sprachen
   - Endliche Automaten und reguläre Ausdrücke (`rm *.pdf`)
   - Kontextfreie Grammatiken (`<A> ::= <A> + <A> | <A> * <A> | ...`)
2. Berechenbarkeit
   - Turing Maschinen, Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit
   - Komplexitätsklassen (P und NP)

Ziele:

Abstraktion von *irrelevanten* Details:
zB nicht x86 sondern Turingmaschine.

Formalisierung durch mathematische Objekte (Mengen, Funktionen, Relationen)

Simulation eines Formalismus durch einen anderen:
zB deterministische durch nichtdeterministische Maschinen

Äquivalenz von Formalismen:
zB endliche Automaten und reguläre Ausdrücke.

Reduktion von einem Problem auf ein anderes:
zB Formeln auf Automaten, ...

Endliche Beschreibungen unendlicher Mengen

Informatik ist keine (schwarze) Kunst sondern eine exakte Wissenschaft.

2. Literatur

John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman.
Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation.

Dexter Kozen.
Automata and Computability.

Katrin Erk, Lutz Priese.
Theoretische Informatik: Eine umfassende Einführung.

Uwe Schöning.
Theoretische Informatik — kurzgefasst.

Kapitel II Formale Sprachen und Automaten

1. Grundbegriffe

Definition 1.1

- Ein Alphabet Σ ist eine endliche Menge.
  Bsp: $\{0, 1\}$, ASCII, Unicode.
- Ein Wort/String über Σ is eine endliche Folge von Zeichen aus Σ, zB 010.
- Das leere Wort wird mit ϵ bezeichnet.
- Sind u und v Wörter, so ist uv ihre Konkatenation.
- Ist w ein Wort, so ist w^n definiert durch
  $w^0 = \epsilon$ und $w^{n+1} = ww^n$. Bsp: $(ab)^3 = ababab$.
- $|w|$ ist die Länge eines Wortes w.
- Σ^* ist die Menge aller Wörter über Σ.
- Eine Teilmenge $L \subseteq \Sigma^*$ ist eine (formale) Sprache.

Beispiel 1.2 (Formale Sprachen)

- Die Menge aller Wörter im Duden (24. Aufl.)
- Die Menge der deutschen Sätze ist keine formale Sprache
- Die Menge aller legalen Java 1.5 Programme ist (leider) keine formale Sprache
- $L_1 = \{\epsilon, ab, abab, ababab, \ldots\} = \{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
  $(\Sigma_1 = \{a, b\})$
- $L_2 = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, \ldots\} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
  $(\Sigma_2 = \{a, b\})$
- $L_3 = \{\epsilon, 1, 100, 1001, 10000, \ldots\} =$
  $\{w \in \{0,1\}^* \mid w$ ist eine binär kodierte Quadratzahl$\}$
  $(\Sigma_3 = \{0, 1\})$
- $\emptyset$
- $\{\epsilon\}$
- ϵ ist keine Sprache

Definition 1.3 (Operationen auf Sprachen)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

- Konkatenation: $AB = \{uv \mid u \in A \wedge v \in B\}$
  Bsp: $\{ab, b\}\{a, bb\} = \{aba, abbb, ba, bbb\}$
  NB: $\{ab, b\} \times \{a, bb\} = \{(ab, a), (ab, bb), (b, a), (b, bb)\}$
- $A^n = \{w_1 \dots w_n \mid w_1, \dots, w_n \in A\} = A \cdots A$
  Bsp: $\{ab, ba\}^2 = \{abab, abba, baab, baba\}$
  Rekursiv: $A^0 = \{\epsilon\}$ und $A^{n+1} = AA^n$
- $A^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0 \wedge w_1, \dots, w_n \in A\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$
  Bsp: $\{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, \dots\} \neq \{0, 1\}^*$
- $A^+ = AA^* = \bigcup_{n \geq 1} A^n$
  Bsp: $\Sigma^+ =$ Menge aller nicht-leeren Wörter über Σ

Achtung:

- Für alle A: $\epsilon \in A^*$
- $\emptyset^* = \{\epsilon\}$

Einige Rechenregeln:

Lemma 1.4

- $\emptyset A = \emptyset$
- $\{\epsilon\}A = A$

Lemma 1.5

- $A(B \cup C) = AB \cup AC$
- $(A \cup B)C = AC \cup BC$

Achtung: i.A. gilt $A(B \cap C) = AB \cap AC$ *nicht*.

Lemma 1.6

$A^*A^* = A^*$

Erinnerung: Eine Menge M ist abzählbar falls sie gleich mächtig wie eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist,

- d.h., es gibt eine Bijektion zw. M und einer Teilmenge von $\mathbb{N}$,
- d.h., es gibt eine Nummerierung der Elemente von M so dass $M = \{m_0, m_1, \dots\}$.

Eine Menge ist überabzählbar wenn sie nicht abzählbar ist.

Lemma 1.7

Σ^* *ist abzählbar (falls* Σ *endlich).*

Beweis:

Durch Beispiel:

$$\begin{array}{lclllllllll} \{0,1\}^* & = & \{\epsilon, & 0, & 1, & 00, & 01, & 10, & 11, & 000, \dots\} \\ \mathbb{N} & = & \{0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \dots\} \end{array}$$

$\square$

Satz 1.8

Die Menge der Sprachen über einem nicht-leeren Alphabet ist überabzählbar.

Beweis:

Indirekt. Nimm an, die Menge der Sprachen sei abzählbar.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & w_0 & w_1 & w_2 & \dots & = \Sigma^* \\
\hline
L_0 & 0 & 1 & 1 & \dots & \\
L_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & \\
L_2 & 1 & 1 & 1 & \dots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots &
\end{array}
$$

Eine Sprache L, die nicht in der Tabelle ist: $\neg$Diagonale!

$$
\begin{array}{c|cccc}
L & 1 & 1 & 0 & \dots
\end{array}
$$

Widerspruch!

Formal: $L := \{w_i \mid w_i \notin L_i\}$

Dann $L \neq L_i$ für alle i, da $w_i \in L \Leftrightarrow w_i \notin L_i$. $\square$

Definition 1.9

Eine Sprache $M \subseteq \Sigma^*$ ist entscheidbar gdw es einen Algorithmus gibt, der ihre charakteristische Funktion

$$\chi_M(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M \\ 0 & \text{falls } x \notin M \end{cases}$$

berechnet.

Beispiel 1.10 (Entscheidbare Sprachen)

- Die Menge aller Wörter im Duden (24. Aufl.)
- $\{(ab)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Die Menge aller Primzahlen (dezimal kodiert)
- $\emptyset$
- $\{\epsilon\}$

Satz 1.11

Es gibt nicht-entscheidbare Sprachen.

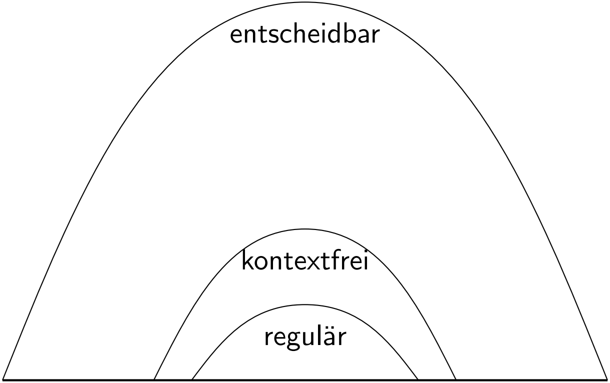
Beweis:

Jeder Algorithmus ist ein Wort.
Daher gibt es nur abzählbar viele Algorithmen.
Aber überabzählbar viele Sprachen, also mehr als Algorithmen. □

Wir haben sogar gezeigt:

- Es gibt höchstens *abzählbar viele entscheidbare Sprachen*.
- Damit verbleiben *überabzählbar viele unentscheidbare Sprachen*.

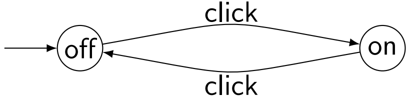
alle formalen Sprachen



2. Reguläre Sprachen

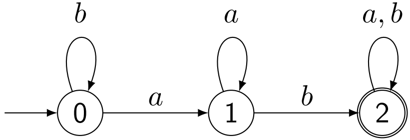
2.1 Deterministische endliche Automaten

Ein Schalter:



UML state charts sind endliche Automaten.

Ein endlicher Automat mit Endzustand:



Eingabewort $baba \leadsto$ Zustandsfolge 0,0,1,2,2.
Menge der Wörter, die vom Start- in den Endzustand führen?
Alle Wörter, die ab enthalten.

Definition 2.1

Ein deterministischer endlicher Automat (*deterministic finite automaton*, DFA) $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ besteht aus

- einer endlichen Menge von Zuständen Q,
- einem (endlichen) Eingabealphabet Σ,
- einer (totalen!) Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$,
- einem Startzustand $q_0 \in Q$, und
- einer Menge von Endzuständen $F \subseteq Q$.

Endzustände heißen auch akzeptierenden Zustände.
Die von M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) := \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\} \ ,$$

wobei $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ rekursiv definiert ist durch

$$\begin{array}{rcll} \hat{\delta}(q, \epsilon) & = & q & \\ \hat{\delta}(q, aw) & = & \hat{\delta}(\delta(q, a), w) & \text{für } a \in \Sigma, w \in \Sigma^* \end{array}$$

Definition 2.2
Eine Sprache ist **regulär** gdw sie von einem DFA akzeptiert wird.

Offensichtlich gilt:

Fakt 2.3
Reguläre Sprachen sind entscheidbar.

Bemerkungen

- Endliche Automaten können durch gerichtete und markierte Zustandsgraphen veranschaulicht werden:
  - Knoten $\widehat{=}$ Zuständen
  - Kanten $\widehat{=}$ Übergängen: $p \xrightarrow{a} q \ \widehat{=}\ \delta(p,a) = q$

  Der Anfangszustand wird durch einen Pfeil, Endzustände werden durch doppelte Kreise gekennzeichnet.

- Die Operation $\hat{.}$ ist ein Funktional. In OCaml:

```
let rec dach f q = function
    [] -> q |
    a::w -> dach f (f q a) w
```

  D.h. `dach` = `fold_left` !

- Die Erweiterung von f auf $\hat{f}$ funktioniert für beliebige $f : A \times B \to A$

- Für $a \in \Sigma$ gilt $\hat{\delta}(q,a) = \hat{\delta}(q,a\epsilon) = \hat{\delta}(\delta(q,a),\epsilon) = \delta(q,a)$

Das Beweisprinzip Induktion über die Länge von Wörtern hat folgenden häufigen Spezialfall:

- Basis: Zeige die Behauptung für $w = \epsilon$
- Induktionsannahme: Die Behauptung stimmt für w.
  Schritt: Zeige die Behauptung für aw, $a \in \Sigma$.
  Alternative: Zeige die Behauptung für wa, $a \in \Sigma$.

Damit gilt die Behauptung für alle Wörter.

Lemma 2.4

Für $x \in \Sigma$ *und* $w \in \Sigma^*$ *gilt* $\hat{\delta}(q, wx) = \delta(\hat{\delta}(q, w), x)$

Beweis:

Mit Induktion über die Länge von w:

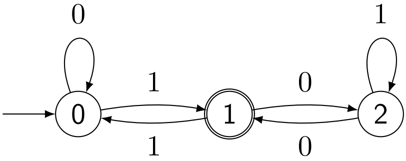
- Basis: $w = \epsilon$:
  $\hat{\delta}(q, \epsilon x) = \hat{\delta}(q, x\epsilon) = \hat{\delta}(\delta(q, x), \epsilon) = \delta(q, x) = \delta(\hat{\delta}(q, \epsilon), x)$
- Schritt:

$$
\begin{aligned}
& \hat{\delta}(q, awx) \\
&= \hat{\delta}(\delta(q, a), wx) && \text{Def. von } \hat{\delta} \\
&= \delta(\hat{\delta}(\delta(q, a), w), x) && \text{Ind.Hyp.} \\
&= \delta(\hat{\delta}(q, aw), x) && \text{Def. von } \hat{\delta}
\end{aligned}
$$

□

Beispiel 2.5

Ein DFA M:



Für $w \in \{0,1\}^*$ sei $\#w$ die von w binär repräsentierte Zahl, zB $\#100 = 4$.

$$L(M) = \{w \mid \#w \bmod 3 = 1\}$$

Beweis:

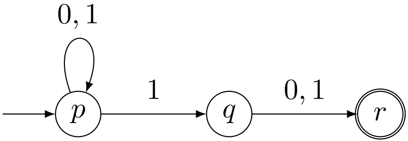
1. $\delta(q, b) =$
2. $\hat{\delta}(0, w) =$ $\square$

2.2 Nichtdeterministische endliche Automaten

Verallgemeinerung: $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$
$[\mathcal{P}(Q) = \text{Potenzmenge} = \text{Menge aller Teilmengen} = 2^Q\ ]$

Beispiel 2.6

Erkennung der Binärzahlen, deren vorlezte Ziffer 1 ist:



Wort wird akzepiert gdw es einen Weg zum Endzustand gibt.

Intuitive Vorstellung:

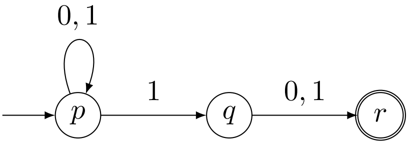
- Der Automat durchsucht alle möglichen Wege (parallel/sequentiell).
- Der Automat "rät" den richtigen Weg.

Definition 2.7

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (*nondeterministic finite automaton*, NFA) ist ein 5-Tupel $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, so dass

- Q, Σ, q_0 und F sind wie bei einem DFA
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$

Beispiel



δ	0	1
p	$\{p\}$	$\{p, q\}$
q	$\{r\}$	$\{r\}$
r	$\emptyset$	$\emptyset$

Alternative: Relation $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$

Erweiterung von $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$
auf $\bar{\delta} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$:

$$\bar{\delta}(S, a) := \bigcup_{q \in S} \delta(q, a)$$

$\Rightarrow \hat{\bar{\delta}} : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$

Intuition:

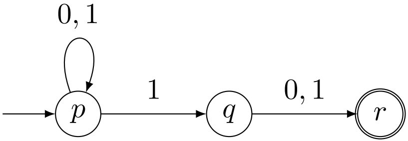
$\hat{\bar{\delta}}(S, w)$ ist Menge aller Zustände,
die sich von einem Zustand in S aus mit w erreichen lassen.

Die von $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ akzeptierte Sprache ist

$$L(N) := \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\bar{\delta}}(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Um Tod durch Notation zu vermeiden schreiben wir oft nur δ statt $\bar{\delta}$.

Beispiel



$$\hat{\bar{\delta}}(\{p,q\},10) \; =$$

$$\hat{\bar{\delta}}(\bar{\delta}(\{p,q\},1),0) \; =$$

$$\hat{\bar{\delta}}(\delta(p,1)\cup\delta(q,1),0) \; =$$

$$\hat{\bar{\delta}}(\{p,q,r\},0) \; =$$

$$\bar{\delta}(\{p,q,r\},0) \; =$$

$$\delta(p,0)\cup\delta(q,0)\cup\delta(r,0) \; =$$

$$\{p\}\cup\{r\}\cup\emptyset \; = \; \{p,r\}$$

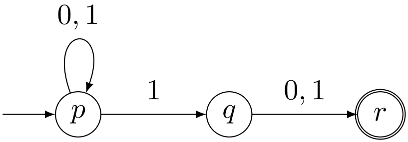
2.3 Äquivalenz von NFA und DFA

Satz 2.8

Für jede von einem NFA akzeptierte Sprache L gibt es einen DFA M mit

$$L = L(M) .$$

Beispiel



Beweis:

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA.
Definiere den DFA $M = (\mathcal{P}(Q), \Sigma, \bar{\delta}, \{q_0\}, F_M)$:

$$F_M := \{S \subseteq Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{rcll} w \in L(N) & \Leftrightarrow & \hat{\bar{\delta}}(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset & \text{Def.} \\ & \Leftrightarrow & \hat{\bar{\delta}}(\{q_0\}, w) \in F_M & \text{Def.} \\ & \Leftrightarrow & w \in L(M) & \text{Def.} \end{array} \qquad \square$$

Dies nennt man die Potenzmengen- oder Teilmengenkonstruktion.

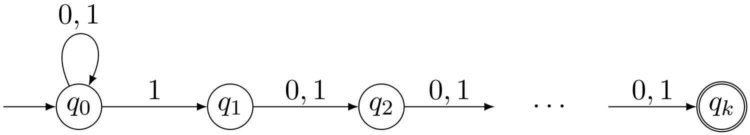
Warum NFAs?

Mit NFAs lassen sich reguläre Sprachen
(u.U. exponentiell) kompakter darstellen.

Beispiel 2.9

$$L_k := \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{das } k\text{-letzte Bit von } w \text{ ist } 1\}$$

Ein NFA für diese Sprache ist gegeben durch:



Die Potenzmengenkonstruktion liefert einen DFA für L_k mit 2^{k+1} Zuständen. Geht es kompakter?

Lemma 2.10
Jeder DFA M mit $L(M) = L_k$ hat mindestens 2^k Zuständen.

Im *schlimmsten* Fall ist ein exponentieller Sprung unvemeidlich.

Beweis:

Indirekt. Sei M ein DFA mit $< 2^k$ Zuständen, so dass $L(M) = L_k$.

- Es gibt $w_1, w_2 \in \{0,1\}^k$ mit $w_1 \neq w_2$ aber $\hat{\delta}(q_0, w_1) = \hat{\delta}(q_0, w_2)$
- Sei $w_1 = wa_i \ldots a_k$ und $w_2 = wb_i \ldots b_k$ mit $a_i \neq b_i$
- OE sei $a_i = 1$, $b_i = 0$
- $w_1 0^{i-1} = wa_i \ldots a_k 0^{i-1} \in L_k$ und $w_2 0^{i-1} = wb_i \ldots b_k 0^{i-1} \notin L_k$
- $\hat{\delta}(q_0, w_1 0^{i-1}) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, w_1), 0^{i-1}) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, w_2), 0^{i-1}) = \hat{\delta}(q_0, w_2 0^{i-1})$ ↯

$\square$

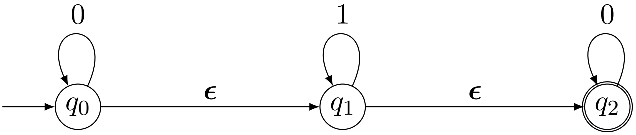
2.4 NFAs mit ϵ-Übergängen

Definition 2.11

Ein NFA mit $\boldsymbol{\epsilon}$-Übergängen (auch $\boldsymbol{\epsilon}$-NFA) ist ein NFA mit einem speziellen Symbol $\boldsymbol{\epsilon} \notin \Sigma$ und mit

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\boldsymbol{\epsilon}\}) \to \mathcal{P}(Q) \; .$$

Ein $\boldsymbol{\epsilon}$-Übergang darf ausgeführt werden, ohne dass ein Eingabezeichen gelesen wird.



Akzeptiert: ϵ, 00, 11, ... Nicht akzeptiert: 101, ...

Bemerkung: $\boldsymbol{\epsilon} \neq \epsilon$; $\boldsymbol{\epsilon}$ ist ein einzelnes Symbol, ϵ das leere Wort.

Formal betrachten wir einen $\boldsymbol{\epsilon}$-NFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ als kompakte Repräsentation eines $\boldsymbol{\epsilon}$-freien NFA $N' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, F')$

- $\delta' : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$:

$$\delta'(q, a) := \bigcup_{i \geq 0, j \geq 0} \hat{\delta}(\{q\}, \boldsymbol{\epsilon}^i a \boldsymbol{\epsilon}^j) \ .$$

- Falls N das leere Wort ϵ akzeptiert, also falls

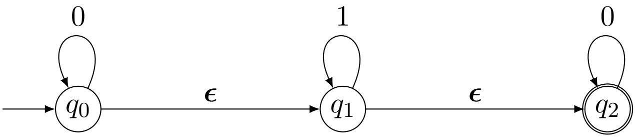
$$\exists i \geq 0.\ \hat{\delta}(\{q_0\}, \boldsymbol{\epsilon}^i) \cap F \neq \emptyset$$

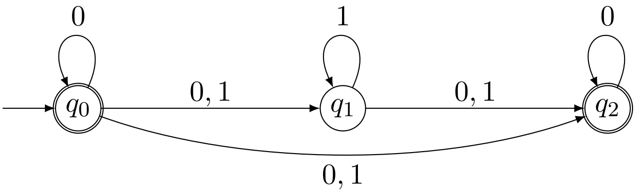
  dann setze $F' := F \cup \{q_0\}$, sonst setze $F' := F$.

Damit gilt per definitionem:

Jeder $\boldsymbol{\epsilon}$-NFA ist äquivalent zu einem NFA.

Beispiel 2.12





Warum $\boldsymbol{\epsilon}$-NFAs?

Sie sind praktisch.

Ab jetzt: „ϵ-Übergang“ und „ϵ-NFA“

Vorläufiges Fazit:
Die folgenden Automatentypen sind gleich mächtig:

- DFA
- NFA
- ϵ-NFA

2.5 Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sind eine kompakte Notation für formale Sprachen.

Definition 2.13

Reguläre Ausdrücke (*regular expressions*, REs) sind induktiv definiert:

- $\emptyset$ ist ein regulärer Ausdruck.
- ϵ ist ein regulärer Ausdruck.
- Für jedes $a \in \Sigma$ ist a ist ein regulärer Ausdruck.
- Wenn α und β reguläre Ausdrücke sind, dann auch
  - $\alpha\beta$
  - $\alpha \mid \beta$ (oft $\alpha + \beta$ geschrieben)
  - α^*.

Nichts sonst ist ein regulärer Ausdruck.

Notation:

- Reguläre Ausdrücke können bzw. müssen geklammert werden.
- Bindungsstärke: * stärker als Konkatenation stärker als $|$
- $ab^* = a(b^*) \neq (ab)^*$
- $ab \mid c = (ab) \mid c \neq a(b \mid c)$

Definition 2.14

Zu einem regulären Ausdruck γ ist die zugehörige Sprache $L(\gamma)$ rekursiv definiert:

- $L(\boldsymbol{\emptyset}) = \emptyset$
- $L(\boldsymbol{\epsilon}) = \{\epsilon\}$
- $L(a) = \{a\}$
- $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$
- $L(\alpha \mid \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$
- $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$

Beispiel 2.15

Sei das zugrunde liegende Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$.

- Alle Wörter, die mit 00 enden:

$$(0|1)^*00$$

- Alle Wörter gerader Länge, in denen 0 und 1 alternieren:

$$(01)^* \mid (10)^*$$

- Alle Wörter, die eine gerade Anzahl von 1'en enthalten:

$$(0^*10^*1)^*0^*$$

- Alle Wörter, die die Binärdarstellung einer durch 3 teilbaren Zahl darstellen, also

$$0, 11, 110, 1001, 1100, 1111, 10010, \ldots$$

  Hausaufgabe!

Beispiel 2.16

Gleitkommazahlen: $\Sigma = \{+, -, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, .\}$

$$(+ \mid - \mid \boldsymbol{\epsilon})(DD^* \mid DD^*.D^* \mid D^*.DD^*)$$

wobei $D = (0|1|2|3|4|5|6|7|8|9)$

Erweiterte reguläre Ausdrücke in UNIX:

$$\begin{aligned}
\texttt{.} \quad &= \quad a_1|\ldots|a_n \text{ wobei } \Sigma = \{a_1, \ldots a_n\} \\
\texttt{[}a_1\ldots a_n\texttt{]} \quad &= \quad a_1|\ldots|a_n \\
\texttt{[\^{}}a_1\ldots a_n\texttt{]} \quad &= \quad b_1|\ldots|b_m \text{ wobei } \{b_1,\ldots,b_m\} = \Sigma \setminus \{a_1,\ldots a_n\} \\
\alpha\texttt{?} \quad &= \quad \boldsymbol{\epsilon}|\alpha \\
\alpha\texttt{+} \quad &= \quad \alpha\alpha^* \\
\alpha\{n\} \quad &= \quad \alpha\ldots\alpha \ (n \text{ copies})
\end{aligned}$$

Strukturelle Induktion

Da die regulären Ausdrücke induktiv definiert sind, gilt für sie das Prinzip der strukturellen Induktion:

Um zu beweisen, dass Eigenschaft P für alle regulären Ausdrücke γ gilt, also $P(\gamma)$, beweise

- $P(\emptyset)$
- $P(\boldsymbol{\epsilon})$
- $P(a)$ für alle $a \in \Sigma$
- $P(\alpha) \land P(\beta) \Rightarrow P(\alpha\beta)$
- $P(\alpha) \land P(\beta) \Rightarrow P(\alpha \mid \beta)$
- $P(\alpha) \Rightarrow P(\alpha^*)$

Komfortabler Spezialfall der Induktion über die Länge von γ.

Satz 2.17 (Kleene 1956)

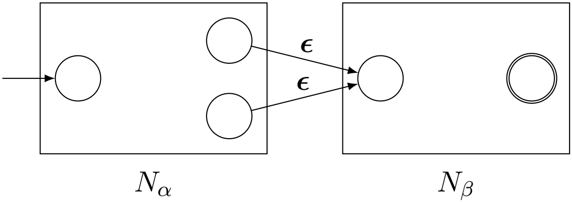
Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann durch einen regulären Ausdruck darstellbar, wenn sie regulär ist.

Beweis:

"$\Longrightarrow$":
Sei $L = L(\gamma)$.
Wir konstruieren einen ϵ-NFA N mit $L = L(N)$ mit Hilfe struktureller Induktion über γ.

Die Basisfälle $\gamma = \emptyset$, $\gamma = \boldsymbol{\epsilon}$, und $\gamma = a \in \Sigma$ sind offensichtlich.

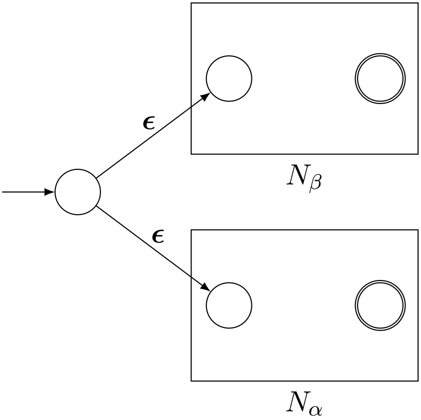
Fall $\gamma = \alpha\beta$:
Nach Induktionsannahme können wir ϵ-NFAs N_α und N_β konstruieren mit $L(N_\alpha) = L(\alpha)$ und $L(N_\beta) = L(\beta)$.



Formal:

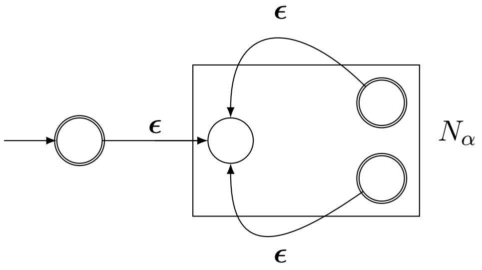
$$
\begin{array}{rcl}
N_\alpha & = & (Q_\alpha, \Sigma, \delta_\alpha, q_{0\alpha}, F_\alpha) \\
N_\beta & = & (Q_\beta, \Sigma, \delta_\beta, q_{0\beta}, F_\beta) \qquad \text{(mit } Q_\alpha \cap Q_\beta = \emptyset\text{)} \\
N_{\alpha\beta} & := & (Q_\alpha \cup Q_\beta, \Sigma, \delta, q_{0\alpha}, F_\beta) \\
\delta & := & \delta_\alpha \cup \delta_\beta \cup \{(f, \boldsymbol{\epsilon}) \mapsto \{q_{0\beta}\} \mid f \in F_\alpha\}
\end{array}
$$

Fall $\gamma = \alpha \mid \beta$:
Nach Induktionsannahme können wir ϵ-NFAs N_α und N_β konstruieren mit $L(N_\alpha) = L(\alpha)$ und $L(N_\beta) = L(\beta)$.



Fall $\gamma = \alpha^*$:
Nach Induktionsannahme können wir einen ϵ-NFA N_α konstruieren mit

$$L(N_\alpha) = L(\alpha) \; .$$



"$\Longleftarrow$":

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ ein DFA.
Wir konstruieren einen RE γ mit $L(M) = L(\gamma)$.

Sei $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$. Wir setzen

$R_{ij}^k := \{w \in \Sigma^* \mid$ die Eingabe w führt von q_i in q_j, wobei alle Zwischenzustände (ohne ersten und letzten) einen Index $\leq k$ haben $\}$

Behauptung: Für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$ können wir einen RE α_{ij}^k konstruieren mit $L(\alpha_{ij}^k) = R_{ij}^k$.

Bew.:

Induktion über k:

$k = 0$: Hier gilt

$$R_{ij}^0 = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}, & \text{falls } i \neq j \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\epsilon\}, & \text{falls } i = j \end{cases}$$

Setze

$$\alpha_{ij}^0 := \begin{cases} a_1 | \ldots | a_l & \text{falls } i \neq j \\ a_1 | \ldots | a_l | \boldsymbol{\epsilon} & \text{falls } i = j \end{cases}$$

wobei $\{a_1 \ldots, a_l\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}$.

Bew.:

Induktion über k:
$k \Rightarrow k+1$: Hier gilt

$$R_{ij}^{k+1} = R_{ij}^{k} \cup R_{i(k+1)}^{k}(R_{(k+1)(k+1)}^{k})^{*} R_{(k+1)j}^{k}$$

weil man jede Folge von Zahlen $\leq k+1$ schreiben kann als

$$F_1, k+1, F_2, k+1, \ldots, k+1, F_m$$

wobei jede F_l Folge von Zahlen $\leq k$ ist.
Wir definieren rekursiv

$$\alpha_{ij}^{k+1} = \alpha_{ij}^{k} \mid \alpha_{i(k+1)}^{k}(\alpha_{(k+1)(k+1)}^{k})^{*} \alpha_{(k+1)j}^{k}$$

Somit gilt

$$L(M) = L(\alpha_{1i_1}^{n} \mid \cdots \mid \alpha_{1i_r}^{n})$$

wobei $F = \{i_1, \ldots, i_r\}$. $\square$

Fakt 2.18
Alle endlichen Sprachen sind regulär.

Unsere Konversionen auf einen Blick:

$$
\begin{tikzcd}
\text{DFA} \arrow[dr] & \text{NFA} \arrow[l] \arrow[d] & \epsilon\text{-NFA} \arrow[l] \\
& \text{RE} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

RE $\to$ ϵ-NFA:	RE der Länge $n \rightsquigarrow O(n)$ Zustände
ϵ-NFA $\to$ NFA:	$Q \rightsquigarrow Q$
NFA $\to$ DFA:	n Zustände $\rightsquigarrow O(2^n)$ Zustände
FA $\to$ RE:	n Zustände $\rightsquigarrow$ RE der Länge $O(n4^n)$

Beweis FA$\to$RE: $m_k :=$ maximale Länge von α_{ij}^k

- $m_0 = c_1|\Sigma|$
- $m_{k+1} = 4 * m_k + c_2$
- $m_k \in O(4^k)$
- Länge des Gesamtausdrucks: $O(n4^n)$

2.6 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 2.19

Seien $R, R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1 R_2,\ R_1 \cup R_2,\ R^*,\ \overline{R}\ (:= \Sigma^* \setminus R),\ R_1 \cap R_2,\ R_1 \setminus R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:

$R_1 R_2$, $R_1 \cup R_2$, R^* klar.

$\overline{R}$ Sei $R = L(A)$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA.
Betrachte $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$.
Dann ist $L(A') = \overline{L(A)} = \overline{R}$

$R_1 \cap R_2 \quad = \overline{\overline{R_1} \cup \overline{R_2}}$ (De Morgan)

$R_1 \setminus R_2 \quad = R_1 \cap \overline{R_2}$ $\square$

Bemerkung
Komplementierung ($\overline{R}$) durch Vertauschen von Endzuständen und Nicht-Endzuständen funktioniert nur bei DFAs, nicht bei NFAs!

Übungsaufgabe: Finde Gegenbeispiel für NFAs

Bei NFAs:

Komplementierung erzwingt Determinierung.

Komplementierung ist (potenziell) teuer.

Die Produkt-Konstruktion:
Durchschnitt direkt auf DFAs, ohne Umweg über de Morgan.

Beide DFAs laufen synchron parallel, Wort wird akzeptiert wenn *beide* akzeptieren.

Parallelismus = Kreuzprodukt der Zustandsräume

Satz 2.20

Sind $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_i)$ *und* $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ *DFAs, dann ist der Produkt-Automat*

$$M := (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (s_1, s_2), F_1 \times F_2)$$
$$\delta((q_1, q_2), a) := (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$$

ein DFA der $L(M_1) \cap L(M_2)$ *akzeptiert.*

Erinnerung: $|Q_1 \times Q_2| = |Q_1||Q_2|$

Beweis:

Mit Induktion über w:

$$\hat{\delta}((q_1, q_2), w) = (\hat{\delta}_1(q_1, w), \hat{\delta}_2(q_2, w)).$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
& w \in L(M) \\
& \Leftrightarrow (\hat{\delta}((s_1, s_2), w) \in F_1 \times F_2 \\
& \Leftrightarrow (\hat{\delta}_1(s_1, w), \hat{\delta}_2(s_2, w)) \in F_1 \times F_2 \\
& \Leftrightarrow \hat{\delta}_1(s_1, w) \in F_1 \wedge \hat{\delta}_2(s_2, w) \in F_2 \\
& \Leftrightarrow w \in L(M_1) \wedge w \in L(M_2) \\
& \Leftrightarrow w \in L(M_1) \cap L(M_2)
\end{aligned}$$

$\square$

Funktioniert Durchschnitt durch Produkt auch für NFAs?

Definition 2.21

Die Umkehrung (Spiegelung) von $w = a_1 \dots a_n$ ist $w^R := a_n \dots a_1$.
Die Umkehrung einer Sprache A ist $A^R := \{w^R \mid w \in A\}$

Satz 2.22

Ist A eine reguläre Sprache, dann auch A^R.

Beweis:

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit $L(M) = A$.
Wir konstruieren nun einen ϵ-NFA M' mit $L(M') = A^R$:

- Kehre alle Übergänge um: $p \xrightarrow{a} q \rightsquigarrow p \xleftarrow{a} q$
- Füge einen neuen Startzustand q_0' hinzu mit $q_0' \xrightarrow{\epsilon} f$ für alle $f \in F$.
- Mache q_0 zum (einzigen) Endzustand.

Dann gilt $L(M') = A^R$.

Beweis (Forts.):

Formal: $M' = (Q \cup \{q_0'\}, \Sigma, \delta', q_0', \{q_0\})$ mit

- $q_0' \notin Q$,
- $\delta'(q, a) = \{p \mid \delta(p, a) = q\}$
- $\delta'(q_0', \boldsymbol{\epsilon}) = F$

Dann gilt $w^R \in L(M') \Leftrightarrow w \in L(M)$.
Beweis mit Induktion über w. $\square$

2.7 Rechnen mit regulären Ausdrücken

Definition 2.23

Zwei reguläre Ausdrücke sind äquivalent gdw sie die gleiche Sprache darstellen:

$$\alpha \equiv \beta \ :\Leftrightarrow\ L(\alpha) = L(\beta)$$

Beispiel zum Unterschied von $=$ (syntaktische Identität) und $\equiv$ (Bedeutungsäquivalenz): $\boldsymbol{\epsilon} \equiv \boldsymbol{\emptyset}^*$ aber $\boldsymbol{\epsilon} \neq \boldsymbol{\emptyset}^*$.
Wird leicht (bewusst oder unbewusst) verwechselt.

Null und Eins:

Lemma 2.24

- $\emptyset \mid \alpha \equiv \alpha \mid \emptyset \equiv \alpha$
- $\emptyset\alpha \equiv \alpha\emptyset \equiv \emptyset$
- $\boldsymbol{\epsilon}\alpha \equiv \alpha\boldsymbol{\epsilon} \equiv \alpha$
- $\emptyset^* \equiv \boldsymbol{\epsilon}$
- $\boldsymbol{\epsilon}^* \equiv \boldsymbol{\epsilon}$

Lemma 2.25

Assoziativität:

- $(\alpha \mid \beta) \mid \gamma \equiv \alpha \mid (\beta \mid \gamma)$
- $(\alpha\beta)\gamma \equiv \alpha(\beta\gamma)$

Kommutativität:

- $\alpha \mid \beta \equiv \beta \mid \alpha$

Distributivität:

- $\alpha(\beta \mid \gamma) \equiv \alpha\beta \mid \alpha\gamma$
- $(\alpha \mid \beta)\gamma \equiv \alpha\gamma \mid \beta\gamma$

Idempotenz:

- $\alpha \mid \alpha \equiv \alpha$

Stern:

Lemma 2.26

- $\boldsymbol{\epsilon} \mid \alpha\alpha^* \equiv \alpha^*$
- $\alpha^*\alpha \equiv \alpha\alpha^*$
- $(\alpha^*)^* \equiv \alpha^*$

Beispiel 2.27

Herleitung einer Äquivalenz aus obigen Lemmas:

$$
\begin{array}{ll}
\boldsymbol{\epsilon} \mid \alpha^* & \\
\equiv \boldsymbol{\epsilon} \mid (\boldsymbol{\epsilon} \mid \alpha\alpha^*) & \text{Stern Lemma} \\
\equiv (\boldsymbol{\epsilon} \mid \boldsymbol{\epsilon}) \mid \alpha\alpha^* & \text{Assoziativität} \\
\equiv \boldsymbol{\epsilon} \mid \alpha\alpha^* & \text{Idempotenz} \\
\equiv \alpha^* & \text{Stern Lemma}
\end{array}
$$

Lässt sich jede gültige Äquivalenz $\alpha \equiv \beta$ aus den obigen Lemmas für $\equiv$ herleiten?

Satz 2.28 (Redko 1964)

Es gibt keine endliche Menge von gültigen Äquivalenzen aus denen sich alle gültigen Äquivalenzen herleiten lassen.

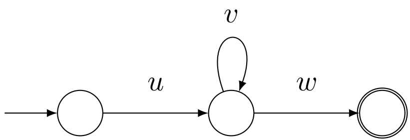
Wenn man mehr als nur Äquivalenzen zulässt:

Arto Salomaa.
Two Complete Axiom Systems for the Algebra of Regular Events. Journal of the ACM, 1966.

2.8 Pumping Lemma

Oder: *Wie zeigt man, dass eine Sprache nicht regulär ist?*

Beispiel 2.29



Satz 2.30 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $n > 0$, so dass sich jedes $z \in R$ mit $|z| \geq n$ so in $z = uvw$ zerlegen lässt, dass

- $v \neq \epsilon$,
- $|uv| \leq n$, *und*
- $\forall i \geq 0.\ uv^iw \in R$.

Die logische Struktur des Satzes:

$$\forall \textit{reg. } R.\ \exists n > 0.\ \forall z \in R.\ |z| \geq n \Rightarrow\ \exists u\ v\ w.\ z = uvw \wedge \ldots$$

Als Spiel:

- Gib mir eine reguläre Sprache R
- Dann gebe ich dir ein $n > 0$ (abhängig von R!!!)
- Gibst du mir dann ein $z \in R$ mit $|z| \geq n$
- So kann ich z in uvw zerlegen so dass ...

Sprechweise: n ist eine Pumping-Lemma-Zahl für R, falls alle $z \in R$ mit $|z| \geq n$ sich so wie im Pumping-Lemma zerlegen und aufpumpen lassen.

Beweis:

Sei $R = L(A)$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z = a_1 \ldots a_m \in R$ mit $m \geq n$.

Die beim Lesen von z durchlaufene Zustandsfolge sei

$$q_0 = p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \cdots \xrightarrow{a_m} p_m$$

Dann muss es $0 \leq i < j \leq n$ geben mit $p_i = p_j$.

Wir teilen z wie folg auf: $\underbrace{a_1 \ldots a_i}_{u} \underbrace{a_{i+1} \ldots a_j}_{v} \underbrace{a_{j+1} \ldots a_{|z|}}_{w}$

Damit gilt:

- $|uv| \leq n$,
- $v \neq \epsilon$, und
- $\forall l \geq 0.\ uv^l w \in R$.

$\square$

[Darf A NFA sein?]

Fazit:

Falls $L(M) = R$ so ist $|Q_M|$ eine Pumping-Lemma-Zahl für R.

Ist $|Q_M| + 1$ auch eine Pumping-Lemma-Zahl für R?

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.31
Die Sprache $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = a^n b^n \in L$.
Dann ist z zerlegbar in uvw mit
$u, v \in \{a\}^*$ (weil $|uv| \leq n$) und $v \neq \epsilon$.
Damit müsste gelten $a^{n-|v|} b^n = uw \in L$. ↯ $\square$

Endliche Automaten können nicht unbegrenzt zählen

Ist die Sprache $\{a^n b^n \mid n \leq 10^6\}$ regulär?

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 2.32
$L = \{0^{m^2} \mid m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:
Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n eine Pumping-Lemma-Zahl für L.
Wähle $z = 0^{n^2} \in L$. Dann ist z zerlegbar in uvw mit

$$1 \leq |v| \leq |uv| \leq n$$

und $uv^l w \in L$ für alle $l \in \mathbb{N}$. D.h. insb. $|uv^2w|$ ist Quadratzahl.
Dies führt zu einem Widerspruch:

$$n^2 = |z| = |uvw| < |uv^2w| \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Denn zwischen n^2 und $(n+1)^2$ liegt keine Quadratzahl. □

Übungsaufgabe:

$$\{1^p \mid p \text{ prim}\} \text{ ist nicht regulär.}$$

Pumping-Lemma-Zahl für $L(ab^*c)$?

Pumping-Lemma-Zahl für $\{aaaaaa\}$?

Erinnerung:

n ist Pumping-Lemma-Zahl für L
gdw
alle $z \in L$ mit $|z| \geq n$ lassen sich aufpumpen.

Bemerkung
Es gibt nicht-reguläre Sprachen, für die das Pumping-Lemma gilt!

$\Rightarrow$ Pumping-Lemma hinreichend aber nicht notwendig um Nicht-Regularität zu zeigen.

$$\text{regulär} \subset \text{Pumping-Lemma gilt} \subset \text{alle Sprachen}$$

2.9 Entscheidbarkeit

- Welche Probleme sind für reguläre Sprachen entscheidbar?
  Sehr viele!
- Wie hängt die Komplexität mit der Repräsentation zusammen:
  DFA , NFA und RE?
  Kommt darauf an . . .

Statt Mengen verwendet man oft Eigenschaften oder Probleme.
Bsp: “ist prim” statt “ist Element der Primzahlen”.

Eine Eigenschaft nennt man entscheidbar gdw die zugehörige Menge entscheidbar ist.
Bsp:

$$\text{„Es ist entscheidbar, ob eine Zahl prim ist“} \\ \equiv \\ \text{„Die Menge der Primzahlen ist entscheidbar“}$$

Definition 2.33
Sei D eine Beschreibung einer Sprache (DFA, NFA, RE, Grammatik, etc).

Wortproblem: Gegeben w, gilt $w \in L(D)$?

Leerheitsproblem: Gilt $L(D) = \emptyset$?

Endlichkeitsproblem: Ist $L(D)$ endlich?

Das Wortproblem für einen festen DFA ist in linearer Zeit entscheidbar:

Fakt 2.34
Sei M ein fester DFA. Das Problem $w \in L(M)$ ist in Zeit $O(|w|)$ entscheidbar.

Lemma 2.35
Jede reguläre Sprache ist in linearer Zeit entscheidbar.

Beweis:
R reguläre $\implies$ Es gibt DFA M mit $L(M) = R$
$\implies$ $w \in R$ ist mit Hilfe von M in Zeit $O(|w|)$ entscheidbar. $\square$

Bisher Automat bzw Sprache fix. Die Eingabe besteht nur aus w.

Jetzt: Wort *und* Automat Eingabe.

Lemma 2.36

Das Problem $w \in L(N)$ ist für beliebiges Wort w und NFA N in Zeit $O(|Q|^2|w| + |N|)$ entscheidbar.

Beweis:

Sei $Q = \{1, \ldots, s\}$, $q_0 = 1$ und $w = a_1 \ldots a_n$.

$S := \{1\}$
for $i := 1$ **to** n **do** $S := \bigcup_{j \in S} \delta(j, a_i)$
return $(S \cap F \neq \emptyset)$

□

Lemma 2.37

Das Leerheitsproblem ist für NFAs und DFAs entscheidbar (in Zeit $O(|Q|^2|\Sigma|)$ bzw $O(|Q||\Sigma|)$).

Beweis:

$L(M) = \emptyset$ gdw kein Endzustand von q_0 erreichbar ist.
Dies ist eine einfache Suche in einem Graphen, die jede Kante maximal ein Mal benutzen muss.
Ein NFA hat $\leq |Q|^2|\Sigma|$ Kanten, ein DFA hat $\leq |Q||\Sigma|$ Kanten. $\square$

Ist Σ fix, z.B. ASCII, so wird daraus $O(|Q|^2)$ bzw $O(|Q|)$.

Global: $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$

$Reach(K) =$
    $R := \emptyset$
    $W := K$
    while $W \neq \emptyset$ **do**
        pick and remove some $p \in W$
        if $p \notin R$ **then**
            $R := R \cup \{p\}$
            $W := W \cup \bigcup_{a \in \Sigma} \delta(p, a)$
    return R

Lemma 2.38

Für endliche Automaten ist das Endlichkeitsproblem entscheidbar.

Beweis:

$|L(M)| = \infty$ gdw von q_0 aus eine nicht-leere Schleife erreichbar ist, von der aus F erreichbar ist:

$finite(Q, \Sigma, \delta, q_0, F) =$
$\quad R := Reach(\{q_0\})$
$\quad C := \{p \in R \mid p \in Reach(\bigcup_{a \in \Sigma} \delta(p, a))\}$
$\quad$ **return** $(Reach(C) \cap F = \emptyset)$

$\square$

Definition 2.39

Seien D_1 und D_2 Sprachbeschreibungen (DFAs, NFAs, REs, Grammatiken, etc).

Äquivalenzproblem: Gilt $L(D_1) = L(D_2)$?

Lemma 2.40

Das Äquivalenzproblem ist für DFAs entscheidbar.

Beweis:

Folgt direkt aus

$$\begin{aligned} L_1 \subseteq L_2 &\Leftrightarrow L_1 \cap \overline{L_2} = \emptyset \\ L_1 = L_2 &\Leftrightarrow L_1 \subseteq L_2 \wedge L_2 \subseteq L_1 \end{aligned}$$

da für DFAs Komplement und Durchschnitt wieder endliche Automaten liefern und das Leerheitsproblem für endliche Automaten entscheidbar ist. $\square$

Satz 2.41

Das Äquivalenzproblem für DFAs ist in Zeit $O(|Q_1||Q_2|)$ entscheidbar (bei fixem Σ).

Beweis:

Gegeben: DFAs M_1 mit m und M_2 mit n Zuständen.
Mit Hilfe der Produkt-Konstruktion für $\cap$ folgt:

	Anzahl der Zustände
$L(M_1) \cap \overline{L(M_2)}$	mn
$\overline{L(M_1)} \cap L(M_2)$	mn

Das Leerheitsproblem ist jeweils in Zeit $O(mn)$ entscheidbar. $\square$

Korollar 2.42

Das Äquivalenzproblem für NFAs ist in Zeit $O(2^{|Q_1|+|Q_2|})$ *entscheidbar (bei fixem* Σ*).*

Beweis: 2 NFAs mit m und n Zuständen $\leadsto$
2 DFAs mit 2^m und 2^n Zuständen $\leadsto$
Äquivalenztest in Zeit $O(2^m 2^n)$

Korollar 2.43

Das Äquivalenzproblem für reguläre Ausdrücke ist entscheidbar.

Fazit:

Die Kodierung der Eingabe (DFA, NFA, RE, ...) kann entscheidend für die Komplexität eines Problems sein.

2.10 Automaten und Gleichungssysteme

Nicht mehr *Beweisen* von Äquivalenzen

Gilt $XX^* \equiv X^*X$ für alle X?

sondern *Lösen*:

Für welches X gilt $X \equiv aX \mid b$?

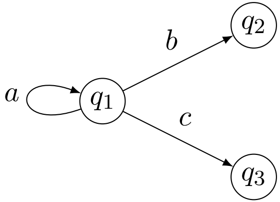
Anwendung:

Automat $\rightsquigarrow$ Gleichungssystem $\rightsquigarrow$ RE

Technische Vereinfachung: die X_i stehen für (unbekannte) REs.

Beispiel 2.44

Ein Automatenfragment:



$$L_i := \{w \mid \hat{\delta}(q_i, w) \in F\}$$
$$\Longrightarrow$$
$$L_1 = \{a\}L_1 \cup \{b\}L_2 \cup \{c\}L_3$$

Da die L_i regulär sein müssen(?), arbeiten wir direkt mit REs:

$$X_1 \equiv aX_1 \mid bX_2 \mid cX_3$$

Lösung X_i ist RE für die von q_i aus akzeptierte Sprache.

Satz 2.45 (Ardens Lemma)

Sind A, B und X Sprachen mit $\epsilon \notin A$, so gilt

$$X = AX \cup B \quad \Longrightarrow \quad X = A^*B$$

Korollar 2.46

Sind α, β und X reguläre Ausdrücke mit $\epsilon \notin L(\alpha)$, so gilt

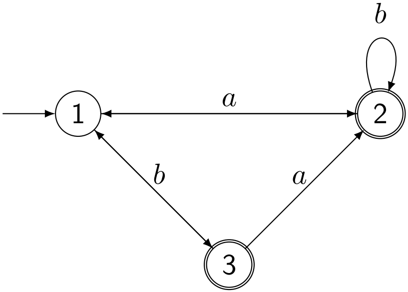
$$X \equiv \alpha X \mid \beta \quad \Longrightarrow \quad X \equiv \alpha^* \beta$$

Bemerkungen

- $X = \{\epsilon\}X \cup B$ hat keine eindeutige Lösung:
  jede Sprache $X \supseteq B$ ist Lösung.
- $X \equiv aXb \mid \boldsymbol{\epsilon}$ hat keine *reguläre* Lösung.

Umwandlung eines DFAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

Beispiel 2.47



Äquivalentes Gleichungssystem:

X_i ist ein RE für die von q_i aus akzeptierte Sprache.

$$
\begin{aligned}
X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\
X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid ? \\
X_3 &\equiv bX_1 \mid aX_2 \mid ?
\end{aligned}
$$

Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv aX_2 \mid bX_3 \\ X_2 &\equiv aX_1 \mid bX_2 \mid \boldsymbol{\epsilon} \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid aX_2 \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

Löse $X_2 \equiv bX_2 \mid (aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})$ nach X_2 auf:

$$X_2 \equiv b^*(aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})$$

Zurück einsetzen:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv a(b^*(aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})) \mid bX_3 \\ X_3 &\equiv bX_1 \mid a(b^*(aX_1 \mid \boldsymbol{\epsilon})) \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und X_i ausklammern:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv ab^*aX_1 \mid ab^* \mid bX_3 \\ X_3 &\equiv (b \mid ab^*a)X_1 \mid ab^* \mid \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X_1 &\equiv ab^*aX_1 \mid bX_3 \mid ab^* \\
X_3 &\equiv (b \mid ab^*a)X_1 \mid ab^* \mid \boldsymbol{\epsilon}
\end{aligned}
$$

X_3 ist gelöst, in 1. Gleichung einsetzen:

$$X_1 \equiv ab^*aX_1 \mid b((b \mid ab^*a)X_1 \mid ab^* \mid \boldsymbol{\epsilon}) \mid ab^*$$

Ausmultiplizieren und X_1 ausklammern:

$$X_1 \equiv (ab^*a \mid bb \mid bab^*a)X_1 \mid bab^* \mid b \mid ab^*$$

Nach X_1 auflösen:

$$X_1 \equiv (ab^*a \mid bb \mid bab^*a)^*(bab^* \mid b \mid ab^*)$$

Umwandlung eines FAs in einen äquivalenten regulären Ausdruck:

- Wandle FA mit n Zuständen in ein System von n Gleichungen mit n Variablen um:

$$X_i \equiv a_{i1}X_1 \mid \cdots \mid a_{in}X_n \mid b_i$$

$$\begin{array}{rcl} a_{ij} & := & c_1 \mid \cdots \mid c_k \quad \text{falls } \{c_1, \ldots, c_k\} = \{c \in \Sigma \mid q_i \xrightarrow{c} q_j\} \\ & & \text{wobei } a_{ij} := \emptyset \text{ falls } q_i \xrightarrow{c} q_j \text{für kein } c \in \Sigma \end{array}$$

$$b_i \quad := \quad \begin{cases} \epsilon & \text{falls } q_i \in F \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

- Löse das System durch schrittweise Elimination von Variablen mit Hilfe von Ardens Lemma für REs (Korollar 2.46).
- Ist k der Startzustand, so beschreibt X_k die vom Automaten akzeptierte Sprache.

Das System in Matrix-Schreibweise, mit $+$ statt $|$:

$$x = Ax + b$$

wobei

$$x = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Matrix-Addition und Multiplikation sind wie üblich definiert, aber auf der Element-Ebene mit

- REs statt Zahlen,
- Konkatenation statt Multiplikation,
- Alternative statt Addition.

Beispiel 2.48

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aX_1 + bX_2 \\ cX_1 + dX_2 \end{pmatrix}$$

Achtung: Die Einträge in den Matrizen sind beliebige REs!
Wenn wir $+$ und $\cdot$ auf Matrizen haben, was könnte * sein?

$$A^* := A^0 + A^1 + A^2 + \cdots$$

Existiert das? Was ist das?
Es gilt: $A(i,j)$ beschreibt alle Wege von i nach j der Länge 1.
$A^n(i,j)$ beschreibt alle Wege von i nach j der Länge n.
Daher sollte gelten:
$A^*(i,j)$ beschreibt alle Wege von i nach j endlicher Länge.

Aus dem Beweis des Satzes von Kleene wissen wir:

$A^*(i,j)$ existiert und ist der reguläre Ausdruck α_{ij}^n.

Satz 2.49

Sei A eine $n \times n$ Matrix regulärer Ausdrücke.
Seien x und b Vektoren der Größe n.
Falls $\epsilon \notin L(A(i,j))$ für alle i, j, dann gilt

$$x = Ax + b \implies x = A^*b$$

Beweis: zB Kozen.
Berechnung von A^*: zB Kozen oder Satz von Kleene.

Bemerkung:
Die Nebenbedingung $\epsilon \notin L(A(i,j))$ ist automatisch gegeben, wenn A von einem Automaten ohne ϵ-Übergänge stammt, denn $A(i,j) = a_{ij}$ ist die Summe der Buchstaben, die von i nach j führen.

Wann wendet man welches Verfahren zum Lösen von Gleichungssystemen an:

- Schrittweises Lösen des Gleichungssystems mit Ardens Lemma: für Berechnungen per Hand.
- Matrizen-Ansatz mit A^*: für Theorie und Programmierung.

Beweis

von Ardens Lemma:
Wir nehmen an $X = AX \cup B$.

$$\begin{aligned} X &= A(AX \cup B) \cup B = A^2 X \cup AB \cup B \\ &= A^2(AX \cup B) \cup AB \cup B = A^3 X \cup A^2 B \cup AB \cup B = \ldots \end{aligned}$$

Mit Induktion zeigt man für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$X = A^{n+1} X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B$$

0: Behauptung wird zu $X = AX \cup B$, der Annahme.

$n+1$:

$$\begin{aligned} X &= A^{n+1} X \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B \\ &= A^{n+1}(AX \cup B) \cup \bigcup_{i \leq n} A^{i+1} B \\ &= A^{n+2} X \cup A^{n+1} B \cup \bigcup_{i \leq n} A^i B \\ &= A^{n+2} X \cup \bigcup_{i \leq n+1} A^i B \end{aligned}$$

$$X = A^{n+1}X \cup \bigcup_{i \le n} A^i B$$

Wir zeigen nun $X = A^*B$.

$A^*B \subseteq X$: $\quad w \in A^*B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B$

$$\implies \exists n.\ w \in A^n B$$

$$\implies w \in X$$

$X \subseteq A^*B$: $\quad$ Sei $w \in X$ und $n := |w|$.

$$\epsilon \notin A$$

$$\implies \forall u \in A^{n+1}.\ |u| \ge n+1$$

$$\implies w \notin A^{n+1}X$$

$$\implies w \in \bigcup_{i \le n} A^i B \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i B = A^*B$$

$\square$

2.11 Minimierung endlicher Automaten

1. Beispiele
2. Algorithmen
3. Minimalitätsbeweis

Der Algorithmus zur Minimierung eines DFA:

1. Entferne alle von q_0 aus nicht erreichbaren Zustände.
2. Berechne die *äquivalenten* Zustände des Automaten.
3. Kollabiere den Automaten durch Zusammenfassung aller äquivalenten Zustände.

Zustände p und q sind unterscheidbar wenn es $w \in \Sigma^*$ gibt mit $\hat{\delta}(p, w) \in F$ und $\hat{\delta}(q, w) \notin F$ oder umgekehrt.
Zustände sind äquivalent wenn sie nicht unterscheidbar sind, d.h. wenn für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\hat{\delta}(p, w) \in F \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q, w) \in F$$

Sind $\delta(p, a)$ und $\delta(q, a)$ unterscheidbar, dann auch p und q.

$\Rightarrow$ Unterscheidbarkeit pflanzt sich rückwärts fort.

Berechnung äquivalenter Zustände eines DFA

durch Berechnung der unterscheidbaren Zustände

Eingabe: DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Ausgabe: Äquivalenzrelation auf Q.

Datenstruktur: Eine Menge U *ungeordneter* Paare $\{p, q\} \subseteq Q$.

Algorithmus U:

1. $U := \{\{p, q\} \mid p \in F \wedge q \notin F\}$
2. **while** $\exists \{p, q\} \notin U.\ \exists a \in \Sigma.\ \{\delta(p, a), \delta(q, a)\} \in U$
   do $U := U \cup \{\{p, q\}\}$

Invariante: $\{p, q\} \in U \implies p$ und q unterscheidbar

Lemma 2.50

Am Ende gilt: U ist Menge aller unterscheidbaren Zustände.

Beweis:

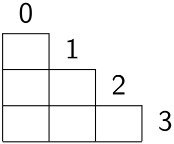
$\{p, q\} \in U \implies p$ und q unterscheidbar: Invariante

p und q unterscheidbar $\implies \{p, q\} \in U$:

Induktion über die Länge eines unterscheidenden Worts. $\square$

Implementierung von U:

Tabelle von anfangs unmarkierten Paaren $\{p, q\}$, $p \neq q$.



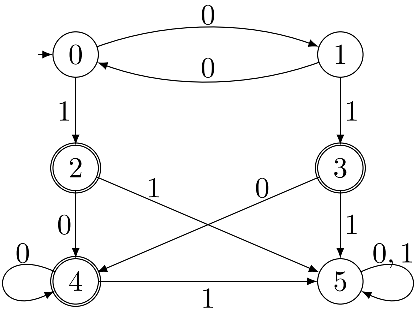
for all $p \in F$, $q \in Q \setminus F$ **do** markiere $\{p, q\}$
while $\exists$ unmarkiertes $\{p, q\}$ $\exists a \in \Sigma$. $\{\delta(p, a), \delta(q, a)\}$ ist markiert
do markiere $\{p, q\}$

Komplexität:

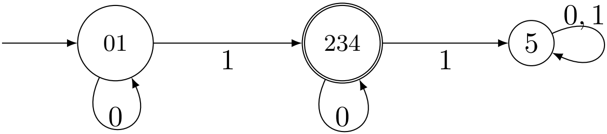
$$O\left(\binom{n}{2} + \binom{n}{2}\binom{n}{2}|\Sigma|\right) = O\left(\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n^2(n-1)^2}{4}|\Sigma|\right) = O(n^4)$$

Bei fixem Σ.

Beispiel 2.51



	0	1	2	3	4
1					
2	×	×			
3	×	×			
4	×	×			
5	×	×	×	×	×



Von $O(n^4)$ zu $O(n^2)$ mit Abhängigkeitsanalyse:

$\{p', q'\}$ unterscheidbar $\implies$
$\{p, q\}$ unterscheidbar falls $\{p, q\} \xrightarrow{a} \{p', q'\}$

$D[\{p', q'\}]$: Menge der Paare $\{p, q\}$ wie oben, anfangs leer

for all $\{p, q\} \subseteq Q$ mit $p \neq q$, $a \in \Sigma$ **do**
    $p' := \delta(p, a);\ q' := \delta(q, a)$
    if $p' \neq q'$ **then** $D[\{p', q'\}] := D[\{p', q'\}] \cup \{\{p, q\}\}$
for all $p' \in F$, $q' \in Q \setminus F$ **do** $mark(\{p', q'\})$

$mark(\{p', q'\}) =$
    if $\{p', q'\}$ unmarkiert **then**
        markiere $\{p', q'\}$
        for all $pq \in D[\{p', q'\}]$ **do** $mark(pq)$

Komplexität: $O(n^2 + n^2) = O(n^2)$.
Korrektheit?

John Hopcroft.
An $n \log n$ *Algorithm for Minimizing the States in a Finite Automaton.* 1971.

Noch eine Anwendung: Äquivalenztest von DFAs.

1. Gegeben DFAs A und B, bilde disjunkte Vereiningung. („Male A und B nebeneinander.“)
2. Berechne Menge der äquivalenten Zustände.
3. $L(A) = L(B)$ gdw die beiden Startzustände äquivalent sind.

Bisher: Der Minimierungsalgorithmus (zur Erinnerung).

1. Entferne alle von q_0 aus nicht erreichbaren Zustände.
2. Berechne die *äquivalenten* Zustände des Automaten.
3. Kollabiere den Automaten durch Zusammenfassung aller äquivalenten Zustände.

Jetzt: Die Präzisierung.

1. Was ist der „kollabierte Automat“?
2. Ist das wirklich der minimale Automat?

Eine Relation $\approx \subseteq A \times A$ ist eine Äquivalenzrelation falls

- Reflexivität: $\forall a \in A.\ a \approx a$
- Symmetrie: $\forall a, b \in A.\ a \approx b \implies b \approx a$
- Transitivität: $\forall a, b, c \in A.\ a \approx b \wedge b \approx c \implies a \approx c$

Äquivalenzklasse:

$$[a]_\approx \ := \ \{b \mid a \approx b\}$$

Es gilt:

$$[a]_\approx = [b]_\approx \quad \Leftrightarrow \quad a \approx b$$

Quotientenmenge:

$$A/\!\approx \ := \ \{[a]_\approx \mid a \in A\}$$

Im Folgenden sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA ohne unerreichbare Zustände.

Definition 2.52 (Äquivalenz von Zuständen)

$$p \equiv_A q \quad \Leftrightarrow \quad (\forall w \in \Sigma^*.\ \hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F)$$

Fakt 2.53

$\equiv_A$ ist eine Äquivalenzrelation.

Wir schreiben $\equiv$ statt $\equiv_A$ wenn A klar ist.

Erinnerung:

Lemma 2.54

$$p \equiv_A q \implies \delta(p, a) \equiv_A \delta(q, a)$$

Lemma 2.55

Algorithmus U *liefert die unterscheidbaren Zustände, also $\not\equiv$.*

In der weiteren Analyse beziehen wir uns direkt auf $\equiv$, nicht mehr auf den Algorithmus.

Die „Kollabierung“ von A bzgl. $\equiv$ ist der *Quotientenautomat*:

Definition 2.56 (Quotientenautomat)

$$\begin{array}{rcl} A/{\equiv} & := & (Q/{\equiv},\ \Sigma,\ \delta',\ [q_0]_\equiv,\ F/{\equiv}) \\ \delta'([p]_\equiv, a) & := & [\delta(p,a)]_\equiv \end{array}$$

Die Definition von δ' ist wohlgeformt da unabhängig von der Wahl des Repräsentanten p:

$$\begin{array}{rcl} [p]_\equiv = [p']_\equiv & \Longrightarrow & p \equiv p' \ \Longrightarrow \ \delta(p,a) \equiv \delta(p',a) \\ & \Longrightarrow & [\delta(p,a)]_\equiv = [\delta(p',a)]_\equiv \end{array}$$

Lemma 2.57

$$L(A/{\equiv}) = L(A)$$

Beweis zur Übung.

Beobachtung
Für $p := \hat{\delta}(q_0, u)$ und $q := \hat{\delta}(q_0, v)$ gilt:

$$\begin{aligned} p \equiv_A q \quad & \Leftrightarrow \quad \forall w \in \Sigma^*.\ \hat{\delta}(p, w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F \\ & \Leftrightarrow \quad \forall w \in \Sigma^*.\ \hat{\delta}(q_0, uw) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, vw) \in F \\ & \Leftrightarrow \quad \forall w \in \Sigma^*.\ uw \in L(A) \Leftrightarrow vw \in L(A) \end{aligned}$$

Definition 2.58

Jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ induziert eine Äquivalenzrelation $\equiv_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$:

$$u \equiv_L v \quad \Leftrightarrow \quad \forall w \in \Sigma^*.\ uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$$

D.h. u und v sind duch Anhängen von Wörtern bzgl $\in L$ nicht unterscheidbar.

Obige Beobachtung lässt sich nun schreiben als

$$u \equiv_{L(A)} v \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q_0, u) \equiv_A \hat{\delta}(q_0, v)$$

Achtung

$p \equiv_A q$ ist eine Relation auf Zuständen von A

$u \equiv_L v$ ist eine Relation auf Wörtern

$$u \equiv_{L(A)} v \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\delta}(q_0, u) \equiv_A \hat{\delta}(q_0, v)$$

Da alle Zustände von q_0 erreichbar sind, gilt sogar: Die Abbildung

$$[u]_{\equiv_{L(A)}} \quad \mapsto \quad [\hat{\delta}(q_0, u)]_{\equiv_A}$$

ist eine Bijektion zwischen den $\equiv_{L(A)}$ und $\equiv_A$ Äquivalenzklassen.

Satz 2.59

Ist A ein DFA ohne unerreichbare Zustände, so ist der von Algorithmus U *berechnete Quotientenautomat $A/{\equiv}$ ein minimaler DFA für $L(A)$.*

Beweis:

Sei $L := L(A)$ und A' ein DFA mit $L(A') = L$. Dann gilt:

$$|Q'| \geq |Q'/{\equiv_{A'}}| = |\Sigma^*/{\equiv_L}| = |Q/{\equiv_A}|$$

$\square$

Es gilt sogar (Übung!):

Fakt 2.60

Alle Quotientenautomaten $A/\equiv_A$ für die gleiche Sprache $L(A)$ haben die gleiche Struktur, d.h. sie unterscheiden sich nur durch eine Umbenennung der Zustände.

Daher beschriften wir die Zustände des kanonischen Minimalautomaten für eine Sprache L mit $\equiv_L$ Äquivalenzklassen.

Beispiel 2.61

Sei $L := \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ endet mit } 00\}$.
Die einzigen drei $\equiv_L$ Äquivalenzklassen sind:

$$\begin{aligned}
[\epsilon]_{\equiv_L} &= \{w \mid w \text{ endet nicht mit } 0\} \\
[0]_{\equiv_L} &= \{w \mid w \text{ endet mit 0, aber nicht mit } 00\} \\
[00]_{\equiv_L} &= \{w \mid w \text{ endet mit } 00\}
\end{aligned}$$

Definition 2.62 (Kanonischer Minimalautomat)

$$M_L \;:=\; (\Sigma^*/{\equiv_L},\ \Sigma,\ \delta_L,\ [\epsilon]_{\equiv_L},\ F_L)$$

mit $\delta_L([w]_{\equiv_L}, a) := [wa]_{\equiv_L}$ und $F_L := \{[w]_{\equiv_L} \mid w \in L\}$.

Man sieht: δ_L ist wohldefiniert und $\hat{\delta}_L([\epsilon]_{\equiv_L}, w) = [w]_{\equiv_L}$.
Dann gilt offensichtlich $L(M_L) = L$.

Satz 2.63 (Myhill-Nerode)

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann regulär, wenn $\equiv_L$ endlich viele Äquivalenzklassen hat.

Beweis:

„$\Longrightarrow$“: Ist L regulär, so wird L von einem DFA A akzeptiert.
Daher hat $\equiv_L$ so viele Äquivalenzklassen wie $A/{\equiv_A}$ Zustände.
„$\Longleftarrow$“: Hat $\equiv_L$ endlich viele Äquivalenzklasse,
so ist M_L ein DFA mit $L(M_L) = L$. □

Wie sieht M_L aus wenn L *nicht* regulär ist?

Beispiel 2.64

$L = \{0^i 1^i \mid i \in \mathbb{N}\}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to [\epsilon] & \xrightarrow{0} & [0] & \xrightarrow{0} & [0^2] & \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} & [0^i] & \xrightarrow{0} & \cdots \\
& & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \\
& & [01] & \xleftarrow{1} & [0^2 1] & \xleftarrow{1} \cdots \xleftarrow{1} & [0^i 1] & \xleftarrow{1} & \cdots
\end{array}$$

Warum $0^i \not\equiv_L 0^j$ falls $i \neq j$?
Was fehlt noch?

Vollständige Methode um Nichtregularität von L zu zeigen:

Gib unendliche Menge $w_1, w_2, \ldots$ an mit $w_i \not\equiv_L w_j$ falls $i \neq j$.

Bemerkung
Eindeutigkeit des minimalen Automaten (modulo Umbenennung der Zustände) gilt nur bei DFAs, nicht bei NFAs!

Aufgabe: Finde Gegenbeispiel für NFAs

Knobelaufgabe:
Nach Def. gilt $p \not\equiv_A q$ gdw $\exists w.\ \hat{\delta}(p, w) \in F \not\Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F$

Man zeige: Falls $p \not\equiv_A q$, dann gibt es ein w der Länge $< |Q|$, das p und q unterscheidet, d.h. $\hat{\delta}(p, w) \in F \not\Leftrightarrow \hat{\delta}(q, w) \in F$.

Rückblick reguläre Sprachen

- DFA, NFA, ϵ-NFA und RE definieren die gleiche Sprachklasse.
  - Potenzmengenkonstruktion (exponentiell)
  - Strukturelle Übersetzung von RE nach ϵ-NFA
  - Übersetzung NFA nach RE, zB über Gleichungssysteme (exponentiell)
- Regularitätserhaltende Konstruktionen auf Sprachen bzw Automaten:
  - $\cup$, $\cap$, $\ldots$, ^{R}, $\ldots$
  - Für welche Darstellung wie teuer? (Komplement, Produkt, ...)
  - NFA kompakt aber oft teuer; DFA oft billiger
- Entscheidungsprobleme auf Automaten und REs:
  - Direkt entscheidbar? Auf Automat? (Oft mit Erreichbarkeit) Auf RE?
  - Reduzierbar auf anderes Problem? ZB $L(A) \subseteq L(B)$ auf $L(A) \cap \overline{L(B)} = \emptyset$
  - Für welche Darstellung wie teuer?

- Pumping-Lemma
- Äquivalenzen $\equiv$ zw REs:
  - Standardregeln: Kommutativität etc, Beweis mit $L(.)$
  - $\alpha \equiv \beta$ entscheidbar da $L(\alpha) = L(\beta)$ über Automaten entscheidbar
  - Auch für REs mit Variablen entscheidbar: betrachte Variablen als Konstanten
  - Gleichungssysteme lösbar
    durch Variablenelimination mit Ardens Lemma
- Minimierung
  - Algorithmen zur Kollabierung
  - Relationen $\equiv_A$ und $\equiv_L$
  - Quotientenautomat $A/\equiv_A$ minimal,
    da gleichgroß wie kanonischer minimaler Automat $M_{L(A)}$
  - L genau dann regulär wenn $\equiv_L$ endlich viele Klassen hat, dh wenn M_L endlich ist (Myhill-Nerode).

3. Kontextfreie Sprachen

3.1 Kontextfreie Grammatiken

Beispiel 3.1 (Arithmetische Ausdrücke)

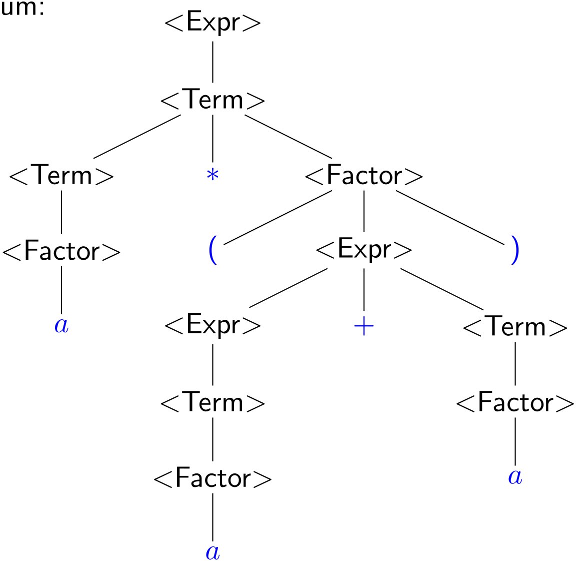
$$\begin{array}{rcl}
<\text{Expr}> & \rightarrow & <\text{Term}> \\
<\text{Expr}> & \rightarrow & <\text{Expr}> + <\text{Term}> \\
<\text{Term}> & \rightarrow & <\text{Factor}> \\
<\text{Term}> & \rightarrow & <\text{Term}> * <\text{Factor}> \\
<\text{Factor}> & \rightarrow & a \\
<\text{Factor}> & \rightarrow & (<\text{Expr}>)
\end{array}$$

Eine (Links)Ableitung:

$<\text{Expr}> \rightarrow$

$\rightarrow a * (a + a)$

Der Syntaxbaum:



Die Blätter des Baums, von links nach rechts gelesen,
ergeben das abgeleitete Wort

Bemerkungen

- Der vollständige Syntaxbaum enthält die gesamte Information über die Ableitung, bis auf die (irrelevante) Reihenfolge des Aufbaus.
- Kontextfreie Grammatiken dienen zur Spezifikation von Sprachen. Ihre Implementierung ist das Parsen:
  - Die Überprüfung, ob ein Wort von einer Grammatik abgeleitet werden kann, bzw
  - Die Erzeugung des Syntaxbaums (*parse tree*).

Parsen ist die Transformation eines Worts in einen Syntaxbaum.

Definition 3.2

Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist ein 4-Tupel:

V ist eine endlichen Menge, die Nichtterminalzeichen (oder Variablen),

Σ ist ein Alphabet, die Terminalzeichen, disjunkt von V,

$P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$ eine endlichen Menge, die Produktionen, und

$S \in V$ ist das Startsymbol.

Konventionen:

- $A, B, C, \dots$ sind Nichtterminale,
- $a, b, c, \dots$ (und Sonderzeichen wie $+, *, \dots$) sind Terminale,
- $\alpha, \beta, \gamma, \dots \in (V \cup \Sigma)^*$
- Produktionen schreiben wir $A \to \alpha$ statt $(A, \alpha) \in P$.
- Statt $A \to \alpha_1$, $A \to \alpha_2$, $A \to \alpha_3$ schreiben wir einfach

$$A \to \alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \alpha_3$$

Beispiel 3.3 (Arithmetische Ausdrücke)

$V = \{E, T, F\}$

$\Sigma = \{a, +, *, (,)\}$

$P =$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & T \mid E + T \\ T & \to & F \mid T * F \\ F & \to & a \mid (E) \end{array} \right\}$$

$S = E$

Definition 3.4

Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ induziert eine Ableitungsrelation $\rightarrow_G$ auf Wörtern über $V \cup \Sigma$:

$$\alpha \rightarrow_G \beta$$

gdw es eine Regel $A \rightarrow \gamma$ in P gibt, und Wörter α_1, α_2, so dass

$$\alpha = \alpha_1 A \alpha_2 \quad \text{und} \quad \beta = \alpha_1 \gamma \alpha_2$$

Beispiel:

$$a + T + a \quad \rightarrow_G \quad a + T * F + a$$

Definition 3.5 (Reflexive transitive Hülle)

$$\begin{aligned}
\alpha \to_G^0 \alpha & \\
\alpha \to_G^{n+1} \gamma & \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \beta.\ \alpha \to_G^n \beta \to_G \gamma \\
\alpha \to_G^* \beta & \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n.\ \alpha \to_G^n \beta \\
\alpha \to_G^+ \beta & \quad :\Leftrightarrow \quad \exists n > 0.\ \alpha \to_G^n \beta
\end{aligned}$$

Beispiel: $E \to_G^{11} a * (a + a)$ und daher $E \to_G^* a * (a + a)$.

Wir nennen

$$\alpha_1 \to_G \alpha_2 \to_G \cdots \to_G \alpha_n$$

eine Linksableitung gdw in jedem Schritt das linkeste Nichtterminal in α_i ersetzt wird.

Definition 3.6 (Kontextfreie Sprache)

Eine kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ erzeugt die Sprache

$$L(G) := \{w \in \Sigma^* \mid S \to_G^* w\}$$

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt kontextfrei gdw es eine kontextfreie Grammatik G gibt mit $L = L(G)$.

Abkürzungen:

CFG Kontextfreie Grammatik (*context-free grammar*)

CFL Kontextfreie Sprache (*context-free language*)

Konvention:

Ist G aus dem Kontext eindeutig ersichtlich, so schreibt man auch nur $\alpha \to \beta$ statt $\alpha \to_G \beta$.

Beispiel 3.7

Die nicht-reguläre Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist kontextfrei, da sie von der CFG

$$S \to aSb \mid \epsilon$$

erzeugt wird. Genauer: $L = L(G)$ wobei $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit

$$\begin{array}{lcl} V & = & \{S\} \\ \Sigma & = & \{a, b\} \\ P & = & \{S \to aSb \mid \epsilon\} \end{array}$$

Der unendliche Baum aller möglichen (Links-)Ableitungen:

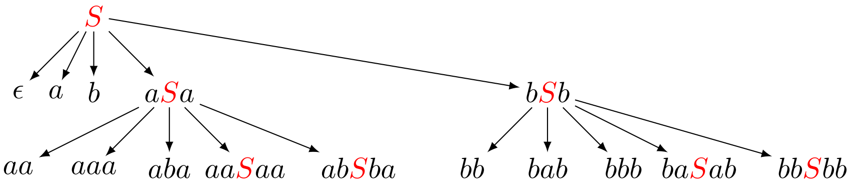
$$\begin{array}{ccccccccc} S & \to & aSb & \to & a^2Sb^2 & \to & a^3Sb^3 & \to & \dots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & \epsilon & & ab & & a^2b^2 & & a^3b^3 \end{array}$$

Beispiel 3.8

Die nicht-reguläre Sprache der Palindrome ($w = w^R$) über $\{a, b\}$ wird von folgender CFG erzeugt:

$$S \to \epsilon \mid a \mid b \mid aSa \mid bSb$$

Der Anfang des unendlichen Baums aller (Links-)Ableitungen (Achtung, dies ist *kein* Syntaxbaum!):



Lemma 3.9 (Dekompositionslemma)

$$\alpha_1\alpha_2 \to_G^n \beta$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists \beta_1, \beta_2, n_1, n_2.\ \ \beta = \beta_1\beta_2 \ \wedge\ n = n_1 + n_2 \ \wedge\ \alpha_i \to_G^{n_i} \beta_i \ (i = 1, 2)$$

Beweis:
Übung! □

Definition 3.10

Eine CFG heißt rechts-linear gdw jede Produkion von der Form

$$A \to aB \quad \text{oder} \quad A \to \epsilon \quad \text{ist.}$$

Eine CFG heißt links-linear gdw jede Produkion von der Form

$$A \to Ba \quad \text{oder} \quad A \to \epsilon \quad \text{ist.}$$

Lemma 3.11

Die rechts-linearen und links-linearen Grammatiken erzeugen jeweils genau die regulären Sprachen.

Beweis: Übung!

Korollar 3.12

Die regulären Sprachen sind eine echte Teilklasse der kontextfreien Sprachen.

3.2 Induktive Definitionen, Syntaxbäume und Ableitungen

1. Beispiel: Balancierte Klammern
2. Induktive Definitionen und Syntaxbäume allgemein
3. Äquivalenz von Ableitung, Syntaxbaum und induktiver Erzeugung

Beispiel 3.13

$$S \to \epsilon \mid \texttt{[}S\texttt{]} \mid SS$$

Um zu zeigen, dass diese Grammatik die Menge aller balancierten Klammerwörter in $\{\texttt{[},\texttt{]}\}^*$ erzeugt, betrachten wir die Grammatik als induktive Definition einer Sprache $L_G(S)$:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} & & \epsilon \in L_G(S) \\ u \in L_G(S) & \Longrightarrow & \texttt{[}u\texttt{]} \in L_G(S) \\ u \in L_G(S) \wedge v \in L_G(S) & \Longrightarrow & uv \in L_G(S) \end{array}}$$

Damit gilt zB:

$$\epsilon \in L_G(S) \implies \texttt{[]} \in L_G(S) \implies \texttt{[[]]} \in L_G(S)$$
$$\implies \texttt{[[]][]} \in L_G(S)$$

Bemerkungen

- Die Produktionen ($\rightarrow$) erzeugen Wörter *top-down*, d.h. von einem Nichtterminal zu einem Wort hin.
- Die induktive Definition ($\Longrightarrow$) erzeugt Wörter *bottom-up*, d.h. sie setzt kleinere Wörter zu größeren zusammen.
- Die induktive Definition betrachtet nur Wörter aus Σ^*.

Zur induktiven Definition von $L_G(S)$ gehört ein Induktionsprinzip:

Um zu zeigen, dass für alle $u \in L_G(S)$ eine Eigenschaft $P(u)$ gilt, dh $\forall u \in L_G(S).\ P(u)$, zeige:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} & & P(\epsilon) \\ P(u) & \Longrightarrow & P(\texttt{[}u\texttt{]}) \\ P(u) \land P(v) & \Longrightarrow & P(uv) \end{array}}$$

„Induktion über die Erzeugung von u"

Lemma 3.14

Alle $u \in L_G(S)$ enthalten gleich viele [wie].

Beweis:

Mit Induktion über die Erzeugung von u:

- ϵ enthält 0 [und].
- Enthält u gleich viele [wie], so auch [u].
- Enthalten u und v gleich viele [wie], so auch uv. $\square$

Hinweis

Die Aussagen

$$\forall x \in M.\ P(x)$$

und

$$\forall x.\ x \in M \implies P(x)$$

sind logisch äquivalent.
Der Allquantor wird dann oft weggelassen:

$$x \in M \implies P(x)$$

Definition 3.15
Präfix:

$$u \preceq w \quad :\Leftrightarrow \quad \exists v.\ uv = w$$

Anzahl der Vorkommen:

$$\#_a(w) := \text{Anzahl der Vorkommen von } a \text{ in } w$$

Für unser Beispiel führen wir zwei Abk. ein:

$$A(w) := \#_{\texttt{[}}(w) \qquad B(w) := \#_{\texttt{]}}(w)$$

Wir nennen $w \in \{\texttt{[},\texttt{]}\}^*$ balanciert gdw

(1) $A(w) = B(w)$ und

(2) für alle Präfixe u von w gilt $A(u) \geq B(u)$

- Balanciert: [], [[]], [][], [[][]][]
- Nicht balanciert:][, []][[]

Satz 3.16

Die Grammatik $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$ erzeugt genau die Menge der balancierten Wörter.

Beweis:

$u \in L_G(S) \implies u$ balanciert:

Mit Ind. über die Erzeugung von u. (1) bewiesen, wir zeigen (2).

ϵ: $p \preceq \epsilon \implies p = \epsilon \implies A(p) = B(p)$

$[u]$: Sei $p \preceq [u]$

Fall $p = \epsilon$: $A(p) = B(p)$

Fall $p = [u]$: $A(p) = A(u) + 1 = B(u) + 1 = B(p)$

Fall $p = [q$ mit $q \preceq u$:

$A(p) = A(q) + 1 \geq B(q) + 1 > B(q) = B(p)$

uv: Sei $p \preceq uv$.

Fall $p \preceq u$: $A(p) \geq B(p)$ mit IA für u

Fall $p = uq$ und $q \preceq v$:

$A(p) = A(u) + A(q) = B(u) + A(q) \geq B(u) + B(q) = B(uq) = B(p)$

Beweis (Forts.)

u balanciert $\implies u \in L_G(S)$:

Mit vollständiger Induktion über $n := |u|$. (dh $u = a_1 \dots a_n$)

IA: Jedes balancierte Wort $< n$ liegt in $L_G(S)$.

Zz: $u \in L_G(S)$.

Falls $n = 0$, so $u = \epsilon \in L_G(S)$.

Sei $n > 0$.

Betrachte Werteverlauf von $h(w) := A(w) - B(w)$:

$h(\epsilon)$, $h(a_1)$, $h(a_1 a_2)$,..., $h(a_1 \dots a_n)$ (alle ≥ 0!).

Insb. gilt $a_1 =$ [und $a_n =$] .

- Es gibt nur die Nullstellen $h(\epsilon)$ und $h(a_1 \dots a_n)$.
  Dann ist $v := a_2 \dots a_{n-1}$ balanciert:
  (1) $A(v) = A(\texttt{[}v\texttt{]}) - 1 = B(\texttt{[}v\texttt{]}) - 1 = B(v)$
  (2) $p \preceq v$: $h(\texttt{[}p) = A(\texttt{[}p) - B(\texttt{[}p) > 0 \implies$
  $$A(p) = A(\texttt{[}p) - 1 > B(\texttt{[}p) - 1 = B(p) - 1 \implies$$
  $$A(p) \geq B(p)$$
  $\implies v \in L_G(S)$ (nach IA) $\implies u = \texttt{[}v\texttt{]} \in L_G(S)$

Beweis (Forts.):

- Es gibt noch eine Nullstelle $h(a_1 \dots a_k)$.
  Sei $u_1 := a_1 \dots a_k$, $u_2 := a_{k+1} \dots a_n$
  Dann sind u_1 und u_2 balanciert:
  (1) $A(u_1) = B(u_1)$ da $h(u_1) = 0$;
  $A(u_2) = A(u) - A(u_1) = B(u) - B(u_1) = B(u_2)$
  (2) $p \preceq u_1 \implies p \preceq u \implies A(p) \geq B(p)$
  $p \preceq u_2$: $A(p) = A(u_1 p) - A(u_1) \geq B(u_1 p) - B(u_1) = B(p)$
  $\implies u_1, u_2 \in L_G(S)$ (nach IA, da $|u_i| < n$)
  $\implies u = u_1 u_2 \in L_G(S)$

$\square$

Moral:

- „$w \in L_G(S) \implies P(w)$" beweist man immer schematisch mit Induktion über die Erzeugung von w.
- „$P(w) \implies w \in L_G(S)$" beweist man oft mit Induktion über $|w|$. Erfordert meist Kreativität.

Wir übertragen jetzt die Idee der induktiven Erzeugung und der dazugehörige Induktionsregel auf beliebige CFGs $G = (V, \Sigma, P, S)$. Sei $V = \{A_1, \ldots, A_k\}$. Damit ist jede Produktion von der Form

$$A_i \to w_0 A_{i_1} w_1 \ldots w_{n-1} A_{i_n} w_n$$

Man kann G wie folgt als eine (simultane) induktive Definition von Sprachen $L_G(A_i)$ für all $A_i \in V$ sehen:
Jede Produktion korrespondiert zu einer Erzeugungsregel

$$u_1 \in L_G(A_{i_1}) \wedge \cdots \wedge u_n \in L_G(A_{i_n}) \implies w_0 u_1 w_1 \ldots w_{n-1} u_n w_n \in L_G(A_i)$$

Aussagen der Form

$$(u \in L_G(A_1) \implies P_1(u)) \wedge \cdots \wedge (u \in L_G(A_k) \implies P_k(u))$$

kann man durch simultane Induktion über die Erzeugung von u beweisen, indem man für jede Produktion zeigt, dass

$$P_{i_1}(u_1) \wedge \cdots \wedge P_{i_n}(u_n) \implies P_i(w_0 u_1 w_1 \ldots w_{n-1} u_n w_n)$$

Beispiel 3.17

Grammatik:

$$A \to \epsilon \mid aB \qquad B \to Aa$$

Induktive Definition:

- $\epsilon \in L_G(A)$
- $w \in L_G(B) \implies aw \in L_G(A)$
- $w \in L_G(A) \implies wa \in L_G(B)$

Beim induktiven Beweis von

$$\begin{aligned}(w \in L_G(A) &\implies \#_a(w) \text{ ist gerade}) \wedge \\ (w \in L_G(B) &\implies \#_a(w) \text{ ist ungerade})\end{aligned}$$

muss man zeigen

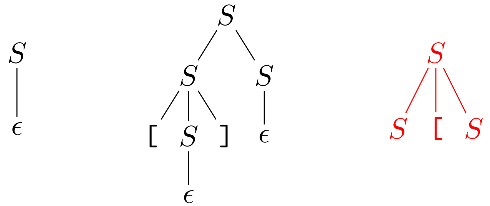
- $\#_a(\epsilon)$ ist gerade
- $\#_a(w)$ ist ungerade $\implies \#_a(aw)$ ist gerade
- $\#_a(w)$ ist gerade $\implies \#_a(wa)$ ist ungerade

Definition 3.18 (Syntaxbaum)

Ein Syntaxbaum für eine Ableitung mit einer Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist ein Baum, so dass

- jedes Blatt mit einem Zeichen aus $\Sigma \cup \{\epsilon\}$ beschriftet ist,
- jeder innere Knoten mit einem $A \in V$ beschriftet ist, und falls die Nachfolger (von links nach rechts) mit $X_1, \dots, X_n \in V \cup \Sigma \cup \{\epsilon\}$ beschriftet sind, dann ist $A \to X_1 \dots X_n$ eine Produktion in P,
- ein Blatt ϵ der einzige Nachfolger seines Vorgängers ist.

Beispiel 3.19 (Syntaxbäume für $S \to \epsilon \mid [S] \mid SS$)



Satz 3.20

Für eine CFG und ein $w \in \Sigma^*$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. $A \rightarrow_G^* w$
2. $w \in L_G(A)$ *(gemäß der induktiven Definition)*
3. *Es gibt einen Syntaxbaum mit Wurzel A, dessen Rand (Blätter von links nach rechts gelesen) das Wort w ist.*

Beweis:

Skizze (Details: [HMU])$1 \Rightarrow 2$: Sei $A \rightarrow_G^n w$. Wir konstruieren dazu einen Beweis für $w \in L_G(A)$ mit Induktion über n. Die Ableitung muss von folgender Form sein:

$$A \rightarrow_G \ w_0 A_1 w_1 \dots A_m w_m \ \rightarrow_G^{n-1} \ w$$

Nach dem Dekompositionslemma muss es u_i und $n_i \leq n-1$ geben mit $A_i \rightarrow_G^{n_i} u_i$ und $w = w_0 u_1 w_1 \dots u_m w_m$. Nach IA (da $n_i < n$) gilt $u_i \in L_G(A_i)$ und daher (mit einem weiteren Erzeugungsschritt) auch $w \in L_G(A)$.

$2 \Rightarrow 3$: Parallel zur induktiven Erzeugung von $w \in L_G(A)$ kann man einen Syntaxbaum mit Rand w erzeugen. Formal: Induktion über die Erzeugung von w.
$3 \Rightarrow 1$: Jeder Baum lässt sich in eine Ableitung, sogar eine Linksableitung(!) umformen. Induktion über die Höhe des Baums: Transformiere die Unterbäume t_i mit Beschriftung A_i in Ableitungen $A_i \to_G^* u_i$ und füge diese mit dem Dekompositionslemma zu einer grossen Ableitung $A \to_G w_0 A_1 w_1 \dots A_m w_m \to_G^* w_0 u_1 w_1 \dots u_m w_m$ zusammen.

Definition 3.21

- Eine CFG G heißt mehrdeutig gdw es ein $w \in L(G)$ gibt, das zwei verschiedene Syntaxbäume hat, also zwei verschiedene Syntaxbäume mit Wurzel S und Rand w.
- Eine CFL L heißt inhärent mehrdeutig gdw jede CFG G mit $L(G) = L$ mehrdeutig ist.

Beispiel 3.22

Die Grammatik $E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid a$ ist mehrdeutig — betrachte $a + a * a$. Die erzeugte Sprache ist aber nicht inhärent mehrdeutig (siehe Beispiel Arithmetische Ausdrücke).

Satz 3.23

Die Sprache $\{a^i b^j c^k \mid i = j \vee j = k\}$ *ist inhärent mehrdeutig.*

3.3 Die Chomsky-Normalform

Definition 3.24
Eine kontextfreie Grammatik G ist in Chomsky-Normalform gdw alle Produktionen eine der Formen

$$A \to a \quad \text{oder} \quad A \to BC$$

haben.

Wir konstruieren und beweisen nun schrittweise:

Satz 3.25
Zu jeder CFG G kann man eine CFG G' in Chomsky-Normalform konstruieren mit $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$.

Wer auf $\epsilon \in L(G')$ nicht verzichten möchte:
Füge am Ende wieder $S \to \epsilon$ hinzu.

Wir nennen $A \to \epsilon$ eine ϵ-Produktion.

Lemma 3.26

Zu jeder CFG $G = (V, \Sigma, P, S)$ *kann man eine CFG* G' *konstruieren, die keine* ϵ*-Produktionen enthält, so dass gilt* $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$

Beweis:

Wir erweitern P induktiv zu eine Obermenge $\hat{P}$:

1. Jede Produktion aus P ist in $\hat{P}$
2. Sind $B \to \epsilon$ und $A \to \alpha B \beta$ in $\hat{P}$, so füge auch $A \to \alpha\beta$ hinzu.

Offensichtlich gilt $L(\hat{G}) = L(G)$:
Jede neue Produktion kann von 2 alten simuliert werden.
Das Ergebnis G' ist $\hat{G}$ ohne die ϵ-Produktionen.
Denn diese sind nun überflüssig:

Beweis (Forts.):

Sei $S \rightarrow^*_{\hat{G}} w$, $w \neq \epsilon$, eine Ableitung minimaler Länge.
Käme darin $B \rightarrow \epsilon$ vor, also

$$S \ \rightarrow^*_{\hat{G}} \ \gamma B \delta \ \rightarrow_{\hat{G}} \ \gamma\delta \ \rightarrow^*_{\hat{G}} \ w$$

so wäre γ oder δ nichtleer, dh B muss durch eine Produktion $A \rightarrow \alpha B \beta$ eingeführt worden sein:

$$S \ \rightarrow^k_{\hat{G}} \ \alpha' A \beta' \ \rightarrow_{\hat{G}} \ \alpha'\alpha B \beta\beta' \ \rightarrow^m_{\hat{G}} \ \gamma B \delta \ \rightarrow_{\hat{G}} \ \gamma\delta \ \rightarrow^n_{\hat{G}} \ w$$

Dann wäre aber folgende Ableitung mit $(A \rightarrow \alpha\beta) \in \hat{P}$ kürzer:

$$S \ \rightarrow^k_{\hat{G}} \ \alpha' A \beta' \ \rightarrow_{\hat{G}} \ \alpha'\alpha\beta\beta' \ \rightarrow^m_{\hat{G}} \ \gamma\delta \rightarrow^n_{\hat{G}} \ w$$

Also kommen in Ableitungen minimaler Länge keine ϵ-Produktionen vor. Letztere sind also überflüssig. $\square$

Beispiel 3.27

$$S \to AB, \quad A \to aAA \mid \epsilon, \qquad B \to bBB \mid \epsilon$$

Wir nennen $A \to B$ eine Kettenproduktion.

Lemma 3.28

Zu jeder CFG $G = (V, \Sigma, P, S)$ kann man eine CFG G' konstruieren, die keine Kettenproduktionen enthält, so dass gilt $L(G') = L(G)$.

Beweis:

Wir erweitern P induktiv zu eine Obermenge $\hat{P}$:

1. Jede Produktion aus P ist in $\hat{P}$
2. Sind $A \to B$ und $B \to \alpha$ in $\hat{P}$, so füge auch $A \to \alpha$ hinzu.

Das Ergebnis G' ist $\hat{G}$ ohne die (nun überflüssigen) Kettenproduktionen.

Rest des Beweises analog zur Elimination von ϵ-Produktionen. □

Beispiel 3.29

$$A \to a \mid B, \qquad B \to b \mid C, \qquad C \to A$$

Konstruktion einer Chomsky-Normalform

Eingabe: Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$

1. Eliminiere alle ϵ-Produktionen.
2. Eliminiere alle Kettenproduktionen.
3. Füge für jedes $a \in \Sigma$, das in einer rechten Seite der Länge ≥ 2 vorkommt, ein neues Nichtterminal A_a zu V hinzu, ersetze a in allen rechten Seiten der Länge ≥ 2 durch A_a, und füge $A_a \to a$ zu P hinzu.
4. Ersetze jede Produktion der Form

$$A \to B_1 B_2 \cdots B_k \ (k \geq 3)$$

durch

$$A \to B_1 C_2, \ C_2 \to B_2 C_3, \ \ldots, \ C_{k-1} \to B_{k-1} B_k$$

wobei $C_2, \ldots, C_{k-1}$ neue Nichtterminale sind.

Definition 3.30

Eine CFG ist in Greibach-Normalform (benannt nach Sheila Greibach, UCLA), falls jede Produktion von der Form

$$A \to aA_1 \ldots A_n$$

ist.

Satz 3.31

Zu jeder CFG G gibt es eine CFG G' in Greibach-Normalform mit $L(G') = L(G) \setminus \{\epsilon\}$.

3.4 Das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

Zur Erinnerung: Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen: Für jede reguläre Sprache L gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lässt in $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $v \neq \epsilon$ und $uv^*w \subseteq L$.

Zum Beweis haben wir $n = |Q|$ gewählt, wobei Q die Zustandsmenge eines L erkennenden DFA war. Das Argument war dann, dass beim Erkennen von z (mindestens) ein Zustand zweimal besucht werden muss und damit der dazwischen liegende Weg im Automaten beliebig oft wiederholt werden kann.

Ein ähnliches Argument kann auch auf kontextfreie Grammatiken angewendet werden.

Satz 3.32 (Pumping-Lemma)

Für jede kontextfreie Sprache L *gibt es ein* $n \geq 1$*, so dass sich jedes Wort* $z \in L$ *mit* $|z| \geq n$ *zerlegen lässt in*

$$z = uvwxy,$$

mit

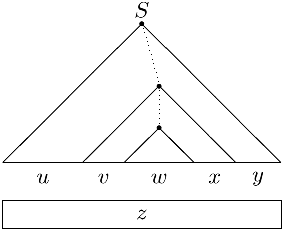
- $vx \neq \epsilon$,
- $|vwx| \leq n$, *und*
- $\forall i \in \mathbb{N}.\ uv^i wx^i y \in L$.

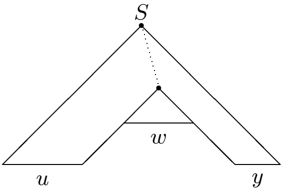
Beweis:

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine CFG in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L \setminus \{\epsilon\}$. Wähle $n = 2^{|V|}$. Sei $z \in L(G)$ mit $|z| \geq n$.

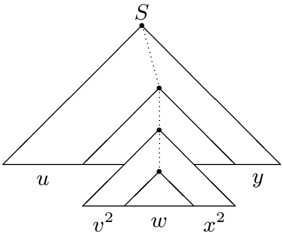
Jeder Binärbaum mit $\geq 2^k$ Blättern hat die Höhe $\geq k$

Dann hat der Syntaxbaum für z (ohne die letzte Stufe für die Terminale) mindestens einen Pfad der Länge $\geq |V|$, da er wegen der Chomsky-Normalform ein Binärbaum ist: Wir betrachten einen solchen Pfad maximaler Länge. Auf diesem Pfad der Länge $\geq |V|$ kommen $\geq |V| + 1$ Nichtterminale vor, also mindestens eins doppelt — nennen wir es A. Die zwischen zwei Vorkommen von A liegende Teilableitung kann nun beliebig oft wiederholt werden.





Dieser Ableitungsbaum zeigt
$uwy \in L$



Dieser Ableitungsbaum zeigt
$uv^2wx^2y \in L$

Beweis (Forts.):

Die Bedingung $vx \neq \epsilon$ folgt, da das obere der beiden A's mit $A \to BC$ abgeleitet werden muss.

Um $|vwx| \leq n$ zu erreichen, darf das obere A maximal $|V| + 1$ Schritte von einem Blatt entfernt sein. Da der ausgewählte Pfad maximale Länge hat, genügt es, dass das obere A vom Blatt dieses Pfads $|V| + 1$ Schritte entfernt ist. Da es nur $|V|$ Nichtterminale gibt, muss ein solches doppeltes A existieren. $\square$

Beispiel 3.33

Wir zeigen, dass die Sprache

$$L := \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

nicht kontextfrei ist.

Wäre L kontextfrei, so gäbe es eine dazugehörige Pumping-Lemma Zahl n und wir könnten jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n$, insb. $z = a^n b^n c^n$, zerlegen und aufpumpen, ohne aus der Sprache herauszufallen. Eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$ bedeutet aber, dass vwx nicht a's und c's enthalten kann. OE nehmen wir an, vwx enhält nur a's und b's. Da $vx \neq \epsilon$, muss vx mindestens ein a oder ein b enthalten. Damit gilt aber $\#_a(uv^2wx^2y) > \#_c(uv^2wx^2y)$ oder $\#_b(uv^2wx^2y) > \#_c(uv^2wx^2y)$. Also $uv^2wx^2y \notin L$. $\lightning$

Beispiel 3.34

Mit dem Pumping-Lemma kann man zeigen, dass die Sprache $\{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$ nicht kontextfrei ist. Dies zeigt, dass Kontextbedingungen in Programmiersprachen, etwa „*Deklaration vor Benutzung*“, nicht durch kontextfreie Grammatiken ausgedrückt werden können.

3.5 Abschlusseigenschaften

Satz 3.35

Seien kontextfreie Grammatiken $G_1 = (V_1, \Sigma_1, P_1, S_1)$ *und* $G_2 = (V_2, \Sigma_2, P_2, S_2)$ *gegeben. Dann kann man in linearer Zeit kontextfreie Grammatiken für*

1. $L(G_1) \cup L(G_2)$
2. $L(G_1)L(G_2)$
3. $(L(G_1))^*$
4. $(L(G_1))^R$

konstruieren.

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist also unter Vereinigung, Konkatenation, Stern und Spiegelung abgeschlossen.

Beweis:

OE nehmen wir an, dass $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

1. $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$; S neu
   $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\}$
2. $V = V_1 \cup V_2 \cup \{S\}$; S neu
   $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\}$
3. $V = V_1 \cup \{S\}$; S neu
   $P = P_1 \cup \{S \to \epsilon \mid S_1 S\}$
4. $P = \{A \to \alpha^R \mid (A \to \alpha) \in P_1\}$

□

Satz 3.36

Die Menge der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen unter Durchschnitt oder Komplement.

Beweis:

$$L_1 := \{a^i b^i c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\} \text{ ist kontextfrei}$$
$$L_2 := \{a^i b^j c^j \mid i, j \in \mathbb{N}\} \text{ ist kontextfrei}$$
$$L_1 \cap L_2 = \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ ist nicht kontextfrei}$$

Wegen de Morgan (1806–1871) können die CFLs daher auch nicht unter Komplement abgeschlossen sein. □

3.6 Algorithmen für kontextfreie Grammatiken

Wie üblich: $G = (V, \Sigma, P, S)$ ist eine CFG.

Ein Symbol $X \in V \cup \Sigma$ ist

- **nützlich** gdw es eine Ableitung $S \to_G^* w \in \Sigma^*$ gibt, in der X vorkommt.
- **erzeugend** gdw es eine Ableitung $X \to_G^* w \in \Sigma^*$ gibt.
- **erreichbar** gdw es eine Ableitung $S \to_G^* \alpha X \beta$ gibt.

Fakt 3.37

Nützliche Symbole sind erzeugend und erreichbar.
Aber nicht notwendigerweise umgekehrt:

$$S \to AB \mid a, \quad A \to b$$

Ziel: Elimination der unnützen Symbole und der Produktionen, in denen sie vorkommen.

Beispiel 3.38

$$S \to AB \mid a, \quad A \to b$$

1. Elimination nicht erzeugender Symbole:

$$S \to a, \quad A \to b$$

2. Elimination unerreichbarer Symbole:

$$S \to a$$

Umgekehrte Reihenfolge:

1. Elimination unerreichbarer Symbole:

$$S \to AB \mid a, \quad A \to b$$

2. Elimination nicht erzeugender Symbole:

$$S \to a, \quad A \to b$$

Satz 3.39

Eliminiert man aus einer Grammatik G

1. *alle nicht erzeugenden Symbole, mit Resultat G_1,*
2. *aus G_1 alle unerreichbaren Symbole, mit Resultat G_2,*

dann enthält G_2 nur noch nützliche Symbole und $L(G_2) = L(G)$.

Beweis:

Wir zeigen zuerst $L(G_2) = L(G)$.

Da $P_2 \subseteq P$ gilt $L(G_2) \subseteq L(G)$.

Umgekehrt, sei $w \in L(G)$, dh $S \rightarrow_G^* w$.
Jedes Symbol in dieser Ableitung ist erreichbar und erzeugend.
Also gilt auch $S \rightarrow_{G_2}^* w$, dh $w \in L(G_2)$.

Beweis (Forts.): $[G_1$: erzeugend in G, G_2 : erreichbar in $G_1]$

Wir zeigen: Alle $X \in V_2 \cup \Sigma_2$ sind nützlich in G_2, dh

$$S \quad \rightarrow^*_{G_2} \quad \ldots X \ldots \quad \rightarrow^*_{G_2} \quad \ldots \in \Sigma_2^*$$

X muss in G_1 erreichbar sein, dh $S \rightarrow^*_{G_1} \alpha X \beta$.
Da alle Symbole in der Ableitung erreichbar sind: $S \rightarrow^*_{G_2} \alpha X \beta$.

Alle Symbole in $\alpha X \beta$ müssen in G erzeugend sein:

$\forall Y \in \alpha X \beta.\ \exists u \in \Sigma^*.\ Y \rightarrow^*_G u$

Da alle Symbole in den Ableitungen $Y \rightarrow^*_G u$ erzeugend sind:

$\forall Y \in \alpha X \beta.\ \exists u \in \Sigma_1^*.\ Y \rightarrow^*_{G_1} u$

Also gibt es $w \in \Sigma_1^*$ mit $\alpha X \beta \rightarrow^*_{G_1} w$.

Da $S \rightarrow^*_{G_1} \alpha X \beta$: Die Ableitung $\alpha X \beta \rightarrow^*_{G_1} w$ enthält nur Symbole, die in G_1 erreichbar sind. Daher auch $\alpha X \beta \rightarrow^*_{G_2} w \in \Sigma_2^*$.

$$S \ \rightarrow^*_{G_2} \ \alpha X \beta \ \rightarrow^*_{G_2} \ w \in \Sigma_2^* \qquad \square$$

Satz 3.40

Die Menge der erzeugenden Symbole einer CFG sind berechenbar.

Beweis:

Wir berechnen die erzeugenden Symbole induktiv:

- Alle Symbole in Σ sind erzeugend.
- Falls $(A \to \alpha) \in P$ und alle Symbole in α sind erzeugend, dann ist auch A erzeugend. □

Beispiel 3.41

$$S \to SAB, \quad A \to BC, \quad B \to C, \quad C \to c$$

Erzeugend: $\{c, C, B, A\}$.

Korollar 3.42

Für eine kontextfreie Grammatik G ist entscheidbar, ob $L(G) = \emptyset$.

Beweis:

□

Satz 3.43

Die Menge der erreichbaren Symbole einer CFG ist berechenbar.

Beweis:

Wir berechnen die erreichbaren Symbole induktiv:

- S ist erreichbar.
- Ist A erreichbar und $(A \to \alpha X \beta) \in P$,
  so ist auch X erreichbar.

$\square$

Satz 3.44

Das Wortproblem ($w \in L(G)$?) ist für eine CFG G entscheidbar.

Beweis:

OE sei $w \neq \epsilon$. Wir eliminieren zuerst alle ϵ-Produktionen aus G (wie in Lemma 3.26).

Dann berechnen wir induktiv die Menge R aller von S ableitbaren Wörter $\in (V \cup \Sigma)^*$, die nicht länger als w sind:

- $S \in R$
- Wenn $\alpha B \gamma \in R$ und $(B \to \beta) \in P$ und $|\alpha\beta\gamma| \leq |w|$, dann auch $\alpha\beta\gamma \in R$.

Man zeigt:

$$w \in L_V(G) \quad \Leftrightarrow \quad w \in R$$

wobei $L_V(G) := \{w \in (V \cup \Sigma)^* \mid S \to_G^* w\}$.

Da R endlich ist ($|R| \leq |V \cup \Sigma|^{|w|}$), ist $w \in R$ entscheidbar, und damit auch $w \in L_V(G)$, und damit auch $w \in L(G)$. □

3.7 Der Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Der CYK-Algorithmus entscheidet das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken in Chomsky-Normalform.

Eingabe: Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-Normalform, $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$.

Definition 3.45

$$V_{ij} := \{A \in V \mid A \rightarrow_G^* a_i \dots a_j\} \quad \text{für } i \leq j$$

Damit gilt:

$$w \in L(G) \quad \Leftrightarrow \quad S \in V_{1n}$$

Der CYK-Algorithmus berechnet die V_{ij} rekursiv nach wachsendem $j - i$:

$$\begin{array}{rcl} V_{ii} & = & \{A \in V \mid (A \to a_i) \in P\} \\ V_{ij} & = & \left\{ A \in V \mid \begin{array}{c} \exists i \leq k < j,\ B \in V_{ik},\ C \in V_{k+1,j}. \\ (A \to BC) \in P \end{array} \right\} \quad \text{für } i < j \end{array}$$

Korrektheitsbeweis: Induktion nach $j - i$.

Die V_{ij} als Tabelle (mit ij statt V_{ij}):

14			
13	24		
12	23	34	
11	22	33	44
a_1	a_2	a_3	a_4

Beispiel 3.46

$$\begin{array}{lcl} S & \to & AB \mid BC \\ A & \to & BA \mid a \\ B & \to & CC \mid b \\ C & \to & AB \mid a \end{array}$$

15				
14	25			
13	24	35		
12	23	34	45	
11	22	33	44	55
b	a	a	b	a

Satz 3.47

Der CYK-Algorithmus entscheidet das Wortproblem $w \in L(G)$ für eine fixe CFG G in Chomsky-Normalform in Zeit $O(|w|^3)$.

Beweis:

Sei $n := |w|$. Es werden $\frac{n(n-1)}{2} \in O(n^2)$ Mengen V_{ij} berechnet.

$$V_{ij} = \left\{ A \in V \mid \begin{array}{c} \exists i \leq k < j,\ B \in V_{ik},\ C \in V_{k+1,j}. \\ (A \to BC) \in P \end{array} \right\} \quad (i < j)$$

Für jede dieser Mengen werden

- $j - i < n$ Werte für k betrachtet,
- für jedes k wird für alle Produktionen $A \to BC$ untersucht, ob $B \in V_{ik}$ und $C \in V_{k+1,j}$, wobei $|V_{ik}|, |V_{k+1,j}| \leq |V|$.

Gesamtzeit: $O(n^3)$

Denn $|P|$ und $|V|$ sind Konstanten unabhängig von n.

[Konstruktion jeder Menge V_{ii}: $O(1)$. Für alle V_{ii} also $O(n)$.] $\square$

Erweiterung
Der CYK-Algorithmus kann so erweitert werden, dass er nicht nur das Wortproblem entscheidet, sondern auch die Menge der Syntaxbäume für die Eingabe berechnet.

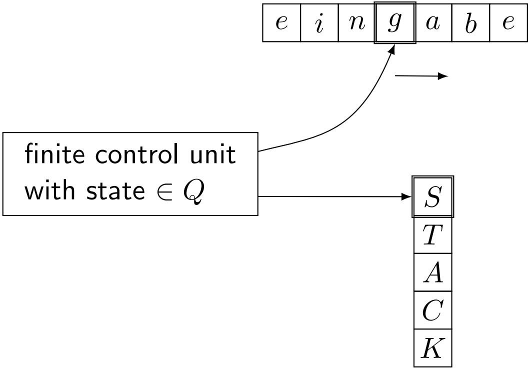
Realisierung:

- V_{ij} ist die Menge der Syntaxbäume mit Rand $a_i \ldots a_j$.
- Statt A enthält V_{ij} einen Syntaxbaum, dessen Wurzel mit A beschriftet ist.

Vorschau
Für CFGs sind folgende Probleme nicht entscheidbar:

- Äquivalenz: $L(G_1) = L(G_2)$?
- Schnittproblem: $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?
- Regularität: $L(G)$ regulär?
- Mehrdeutigkeit: Ist G mehrdeutig?

3.8 Kellerautomaten



Anwendungsgebiete von Kellerautomaten:

- Syntaxanalyse von Programmiersprachen
- Analyse von Programmen mit Rekursion

Definition 3.48

Ein (nichtdeterministischer) Kellerautomat $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ besteht aus

- einer endlichen Menge von Zuständen Q,
- einem endlichen Eingabealphabet Σ,
- einem endlichen Kelleralphabet Γ,
- einem Anfangszustand q_0,
- einem untersten Kellerzeichen Z_0,
- einer Übergangsfunktion $\delta\colon Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Q \times \Gamma^*)$, (Hierbei bedeutet $\mathcal{P}_e$ die Menge aller endlichen Teilmengen)
- einer Menge $F \subseteq Q$ von Endzuständen.

Intuitive Bedeutung von $(q', \alpha) \in \delta(q, a, Z)$:

Wenn sich M in Zustand q befindet, das Eingabezeichen a liest, und Z das oberste Kellerzeichen ist, so kann M im nächsten Schritt in q' übergehen und Z durch α ersetzen.

Intuitive Bedeutung von $(q', \alpha) \in \delta(q, a, Z)$:

> *Wenn sich M in Zustand q befindet, das Eingabezeichen a liest, und Z das oberste Kellerzeichen ist, so kann M im nächsten Schritt in q' übergehen und Z durch α ersetzen.*

Spezialfälle:

POP-Operation:	$\alpha = \epsilon$. Das oberste kellerzeichen Z wird entfernt.
PUSH-Operation:	$\alpha = Z'Z$. Z' wird als neues oberstes Kellerzeichen gePUSHt.
ϵ-Übergang	$a = \epsilon$. Ohne Lesen eines Eingabezeichens.

Aufgabe: Jeder Schritt kann durch eine Sequenz von diesen drei Operationen simuliert werden. (Hilfszustände verwenden.)

Definition 3.49

Eine Konfiguration eines Kellerautomaten M ist ein Tripel (q, w, α) mit $q \in Q$, $w \in \Sigma^*$ und $\alpha \in \Gamma^*$.
Die Anfangskonfiguration von M für die Eingabe $w \in \Sigma^*$ ist (q_0, w, Z_0).

Intuitiv stellt eine Konfiguration (q, w, α) eine "Momentaufnahme" des Kellerautomaten dar:

- Der momentane Zustand ist q.
- Der noch zu lesende Teil der Eingabe ist w.
- Der aktuelle Kellerinhalt ist α (das oberste Kellerzeichen ganz links stehend).

Definition 3.50

Auf der Menge aller Konfigurationen definieren wir eine binäre Relation $\rightarrow_M$ wie folgt:

$$(q, aw, Z\alpha) \rightarrow_M \begin{cases} (q', w, \beta\alpha) & \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, a, Z) \\ (q', aw, \beta\alpha) & \text{falls } (q', \beta) \in \delta(q, \epsilon, Z) \end{cases}$$

Die reflexive und transitive Hülle von $\rightarrow_M$ wird mit $\rightarrow_M^*$ bezeichnet.

Intuitive Bedeutung von $(q, w, \alpha) \rightarrow_M (q', w', \alpha')$:

> *Wenn M sich in der Konfiguration (q, w, α) befindet, dann kann er in einen Schritt in die Nachfolgerkonfiguration (q', w', α') übergehen.*

Achtung: eine Konfiguration kann mehrere Nachfolger haben (Nichtdeterminismus!)

Definition 3.51

- Ein PDA M akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit Endzustand gdw

$$(q_0, w, Z_0) \to_M^* (f, \epsilon, \gamma) \text{ für ein } f \in F,\ \gamma \in \Gamma^*.$$

$$L_F(M) := \{w \mid \exists f \in F, \gamma \in \Gamma^*.\ (q_0, w, Z_0) \to_M^* (f, \epsilon, \gamma)\}$$

- Ein PDA M akzeptiert $w \in \Sigma^*$ mit leeren Keller gdw

$$(q_0, w, Z_0) \to_M^* (q, \epsilon, \epsilon) \text{ für ein } q \in Q.$$

$$L_\epsilon(M) := \{w \mid \exists q \in Q.\ (q_0, w, Z_0) \to_M^* (q, \epsilon, \epsilon)\}$$

Konvention: Wir blenden die F-Komponente von M aus, wenn wir nur an $L_\epsilon(M)$ interessiert sind.

Beispiel 3.52

Die Sprache $L = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ wird vom PDA

$$M = (\{p,q,r\},\ \{0,1\},\ \{0,1,Z_0\},\ p,\ Z_0,\ \delta,\ \{r\})$$

$$\begin{array}{lcll}
\delta(p,a,Z) & = & \{(p,\ aZ)\} & \text{für } a \in \{0,1\},\ Z \in \{0,1,Z_0\} \\
\delta(p,\epsilon,Z) & = & \{(q,\ Z)\} & \text{für } Z \in \{0,1,Z_0\} \\
\delta(q,a,a) & = & \{(q,\ \epsilon\,)\} & \text{für } a \in \{0,1\} \\
\delta(q,\epsilon,Z_0) & = & \{(r,\ \epsilon)\} &
\end{array}$$

sowohl mit Endzustand als auch mit leerem Keller akzeptiert.

Bsp: $(p, 1111, Z_0) \rightarrow_M^* (r, \epsilon, \epsilon)$.

Definiert man $\delta(q,\epsilon,Z_0)$ als $\{(q,\ \epsilon)\}$ statt $\{(r,\ \epsilon)\}$ so gilt:

$$L_F(M') = \emptyset \text{ aber } L_\epsilon(M') = L.$$

Bemerkungen: PDAs und das Wortproblem

- Mit einem NFA A kann man $w \in L(A)$ durch parallele Verfolgung aller Berechnungspfade entscheiden, da sie alle endlich sind.
- Bei einem ϵ-NFA gibt es auch unendliche Berechnungspfade, die aber einfach zu eliminieren sind.
- Bei einem PDA kann es wegen ϵ-Übergängen auch unendliche Berechnungen $\to_M$ geben, zB $\delta(q, \epsilon, Z) = (q, ZZ)$:

$$(q, w, Z) \to_M (q, w, ZZ) \to_M (q, w, ZZZ) \to_M \dots$$

  Diese sind wegen des möglicherweise wachsenden oder pulsierenden Kellers nicht einfach zu eliminieren.
- Daher ist es a priori unklar, wie man mit einem PDA das Wortproblem entscheidet.

Ziel:

Akzeptanz durch Endzustände und leeren Keller gleich mächtig.

Satz 3.53 (Endzustand $\rightarrow$ leerer Keller)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta, F)$ *kann man in linearer Zeit einen PDA* $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q_0', Z_0', \delta')$ *konstruieren mit* $L_F(M) = L_\epsilon(M')$.

Ziel:

$$(q_0, w, Z_0) \rightarrow_M^* (f, \epsilon, \gamma) \quad \Leftrightarrow \quad (q_0', w, Z_0') \rightarrow_{M'}^* (q, \epsilon, \epsilon)$$

Beweisskizze:

M' (mit leerem Keller) simuliert M (mit Endzustand). Zusätzlich:

- Sobald M einen Endzustand erreicht, darf M' den Keller leeren (im neuen Zustand $\bar{q}$).
- Um zu verhindern, dass der Keller von M' leer wird, ohne dass M in einem Endzustand ist, führen wir ein neues Kellersymbol Z_0' ein.

$$\begin{array}{lcl} Q' & := & Q \uplus \{\bar{q}, q_0'\} \\ \Gamma' & := & \Gamma \uplus \{Z_0'\} \end{array}$$

Wir erweitern δ zu δ':

$$\begin{array}{lll}
\delta'(q_0', \epsilon, Z_0') & = \{(q_0, Z_0 Z_0')\} & \\
\delta'(q, b, Z) & = \delta(q, b, Z) & \text{für } q \in Q \setminus F,\ b \in \Sigma \cup \{\epsilon\},\ Z \in \Gamma \\
\delta'(f, a, Z) & = \delta(f, a, Z) & \text{für } f \in F,\ a \in \Sigma,\ Z \in \Gamma \\
\delta'(f, \epsilon, Z) & = \delta(f, \epsilon, Z) \cup \{(\bar{q}, \epsilon)\} & \text{für } f \in F,\ Z \in \Gamma' \\
\delta'(\bar{q}, \epsilon, Z) & = \{(\bar{q}, \epsilon)\} & \text{für } Z \in \Gamma'
\end{array}$$

□

Satz 3.54 (Leerer Keller $\to$ Endzustand)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$ kann man in linearer Zeit einen PDA $M' = (Q', \Sigma, \Gamma', q_0', Z_0', \delta', F)$ konstruieren mit $L_\epsilon(M) = L_F(M')$.

Beweisskizze:

M' (mit Endzustand) simuliert M (mit leerem Keller). Zusätzlich:

- M' schreibt am Anfang ein neues Zeichen Z_0' auf den Keller.
- Sobald M auf dem Keller Z_0' findet, ist der Keller eigentlich leer, und M' geht in den (neuen) Endzustand f.

$$
\begin{array}{lcl}
Q' & := & Q \uplus \{q_0', f\} \\
\Gamma' & := & \Gamma \uplus \{Z_0'\} \\
F & := & \{f\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcll}
\delta'(q_0', \epsilon, Z_0') & = & \{(q_0, Z_0 Z_0')\} & \\
\delta'(q, b, Z) & = & \delta(q, b, Z) & \text{für } q \in Q,\ b \in \Sigma \cup \{\epsilon\},\ Z \in \Gamma \\
\delta'(q, \epsilon, Z_0') & = & \{(f, Z_0')\} & \text{für } q \in Q
\end{array}
$$

$\square$

Die folgenden Sätze erleichtern Beweise über Berechnungen von PDAs.

Lemma 3.55 (Erweiterungslemma)

$$(q, u, \alpha) \to_M^n (q', u', \alpha') \implies (q, uv, \alpha\beta) \to_M^n (q', u'v, \alpha'\beta)$$

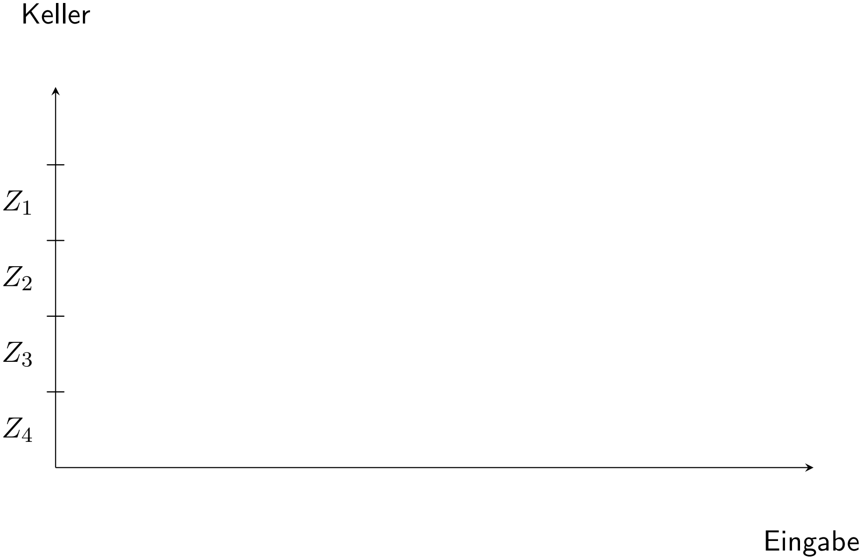
Beweis:
Nach Definition von $\to_M$ gilt

$$(q_i, u_i, \alpha_i) \to_M (q_{i+1}, u_{i+1}, \alpha_{i+1}) \implies$$
$$(q_i, u_i v, \alpha_i \beta) \to_M (q_{i+1}, u_{i+1} v, \alpha_{i+1} \beta)$$

Mit Indukion über n folgt die Behauptung. □

Gilt die Umkehrung, zB

$$(q_1, aa, XZ) \to_M^* (q_3, \epsilon, YZ) \implies (q_1, aa, X) \to_M^* (q_3, \epsilon, Y)\ ?$$


Keller
Z_1
Z_2
Z_3
Z_4
Eingabe

Satz 3.56 (Zerlegungssatz)

Wenn $(q, w, Z_{1\dots k}) \to_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$ *dann gibt es* u_i, p_i, n_i, *so dass*

$$(p_{i-1}, u_i, Z_i) \to_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon) \qquad (i = 1, \dots, k)$$

und $w = u_{1\dots k}$, $p_0 = q$, $p_k = q'$, $\sum n_i = n$.

Beweis: Mit Induktion über n. Basis trivial.

Schritt: Eine Berechnung der Länge $n+1$ hat die Form

$$(q, bw', Z_{1\dots k}) \to_M (p, w', Y_{1\dots l} Z_{2\dots k}) \to_M^n (q', \epsilon, \epsilon)$$

IA $\Rightarrow \exists v_j, r_j, m_j \ (j = 1, \dots, l)$, $\exists u_i, p_i, n_i \ (i = 2, \dots, k)$ mit

$$(r_{j-1}, v_j, Y_j) \to_M^{m_j} (r_j, \epsilon, \epsilon) \qquad (p_{i-1}, u_i, Z_i) \to_M^{n_i} (p_i, \epsilon, \epsilon)$$

und $w' = v_{1\dots l} u_{2\dots k}$, $r_0 = p$, $r_l = p_1$, $p_k = q'$, $\sum m_j + \sum n_i = n$.

Mit Erweiterungslemma: $(r_{j-1}, v_{j\dots l}, Y_{j\dots l}) \to_M^{m_j} (r_j, v_{j+1\dots l}, Y_{j+1\dots l})$

$\Rightarrow (r_0, v_{1\dots l}, Y_{1\dots l}) \to_M^{n_1 - 1} (r_l, \epsilon, \epsilon)$ wobei $n_1 := 1 + \sum m_j$.

Aus $(q, bv_{1\dots l}, Z_1) \to_M (p, v_{1\dots l}, Y_{1\dots l})$ folgt $(p_0, u_1, Z_1) \to_M^{n_1} (p_1, \epsilon, \epsilon)$
wobei $p_0 := q$, $u_1 := bv_{1\dots l}$, $p_1 := r_l$.

Damit auch $w = bw' = bv_{1\dots l} u_{2\dots k} = u_{1\dots k}$ und $\sum n_i = n + 1$. $\square$

3.9 Äquivalenz von PDAs und CFGs

Satz 3.57 (CFG $\to$ PDA)

Zu jeder CFG G kann man einen PDA M konstruieren, der mit leerem Stack akzeptiert, so dass

$$L_\epsilon(M) = L(G).$$

Konstruktion:

Zuerst bringen wir alle Produktionen von G in die Form

$$A \to bB_1 \dots B_k$$

wobei $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$. Methode: Für jedes $a \in \Sigma$

1. füge ein neues A_a zu V hinzu,
2. ersetze a rechts in P durch A_a (außer am Kopfende),
3. füge eine neue Produkion $A_a \to a$ hinzu.

Alle Produktionen in $G = (V, \Sigma, P, S)$ haben jetzt die Form

$$A \rightarrow bB_1 \dots B_k$$

Der PDA wird wie folgt definiert:

$$M \quad := \quad (\{q\}, \Sigma, V, q, S, \delta)$$

wobei

$$(A \rightarrow b\beta) \in P \implies \delta(q, b, A) \ni (q, \beta)$$

also für alle $b \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ und $A \in V$:

$$\delta(q, b, A) := \{(q, \beta) \mid (A \rightarrow b\beta) \in P\}$$

Lemma 3.58

Für alle $u, v \in \Sigma^*$ *und* $\gamma \in V^*$ *und* $A \in V$ *gilt:*

$$A \rightarrow_G^n u\gamma \text{ mit Linksableitung gdw } (q, uv, A) \rightarrow_M^n (q, v, \gamma)$$

Beweis:

Mit Induktion über n. Basis $n = 0$ trivial. Schritt:

$$A \rightarrow_G^{n+1} u\gamma$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists (B \rightarrow b\beta) \in P, w, \alpha.\ A \rightarrow_G^n wB\alpha \rightarrow_G wb\beta\alpha = u\gamma$$
(dh $wb = u$,$\beta\alpha = \gamma$)
$$\Leftrightarrow$$
$$(q, wbv, A) \rightarrow_M^n (q, bv, B\alpha) \wedge (q, bv, B\alpha) \rightarrow_M (q, v, \beta\alpha)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(q, uv, A) \rightarrow_M^{n+1} (q, v, \gamma)$$

□

$A \to_G^n u\gamma$ mit Linksableitung gdw $(q, uv, A) \to_M^n (q, v, \gamma)$

Satz 3.59

$$L(G) = L_\epsilon(M)$$

Beweis:

$u \in L(G)$

$\Leftrightarrow S \to_G^* u$ mit Linksableitung

$\Leftrightarrow (q, u, S) \to_M^* (q, \epsilon, \epsilon)$

$\Leftrightarrow u \in L_\epsilon(M)$ $\square$

Satz 3.60 (PDA $\to$ CFG)

Zu jedem PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \delta)$, der mit leerem Keller akzeptiert, kann man eine CFG G konstruieren mit $L(G) = L_\epsilon(M)$.

Konstruktion: $G := (V, \Sigma, P, S)$ mit

$V := Q \times \Gamma \times Q \cup \{S\}$ wobei wir die Tripel mit $[.,.,.]$ notieren

und P die folgenden Produktionen enthält:

- $S \to [q_0, Z_0, q]$ für alle $q \in Q$
- Für alle $\delta(q, b, Z) \ni (r_0, Z_1 \dots Z_k)$ und für alle $r_1, \dots, r_k \in Q$:

$$[q, Z, r_k] \to b[r_0, Z_1, r_1][r_1, Z_2, r_2] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k]$$

Idee: $[q, Z, r_k] \to_G^* w$ gdw $(q, w, Z) \to_M^* (r_k, \epsilon, \epsilon)$
Die $r_1, \dots, r_k$ sind potenzielle Zwischenzustände beim Akzeptieren der Teilwörter von $bu_1 \dots u_k = w$, die zu $Z_1, \dots, Z_k$ gehören. (Zerlegungssatz!)

Lemma 3.61

$[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$ *gdw* $(q, w, Z) \rightarrow_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$

Beweis:

„$\Rightarrow$“: Mit Induktion über n.

IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n.

Die Ableitung $[q, Z, p] \rightarrow_G^n w$ muss von folgender Form sein:

$$\begin{array}{rcl} [q, Z, r_k] & \rightarrow_G & b[r_0, Z_1, r_1] \ldots [r_{k-1}, Z_k, r_k] \\ & \rightarrow_G^{n-1} & bu_1 \ldots u_k = w \end{array}$$

mit $r_k = p$, $(r_0, Z_1 \ldots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$,

$[r_{i-1}, Z_i, r_i] \rightarrow_G^{n_i} u_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ und $\sum n_i = n - 1$.

IA $\Rightarrow (r_{i-1}, u_i, Z_i) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, \epsilon, \epsilon)$

Erweiterungslemma

$\Rightarrow (r_{i-1}, u_i \ldots u_k, Z_i \ldots Z_k) \rightarrow_M^{n_i} (r_i, u_{i+1} \ldots u_k, Z_{i+1} \ldots Z_k)$

$\Rightarrow (q, w, Z) \rightarrow_M (r_0, u_1 \ldots u_k, Z_1 \ldots Z_k) \rightarrow_M^{n-1} (r_k, \epsilon, \epsilon)$ $\square$

Beweis (Forts.):

„$[q, Z, p] \to_G^n w \Leftarrow (q, w, Z) \to_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$“: Mit Induktion über n.
IA: Beh. gilt für alle Werte $< n$. Zz: Beh. gilt für n.
Die Berechnung $(q, w, Z) \to_M^n (p, \epsilon, \epsilon)$ muss von dieser Form sein:

$$(q, w, Z) \to_M (r_0, w', Z_1 \dots Z_k) \to_M^{n-1} (p, \epsilon, \epsilon)$$

mit $w = bw'$, $(r_0, Z_1 \dots Z_k) \in \delta(q, b, Z)$.
Nach dem Zerlegungssatz muss es r_i, u_i und n_i geben mit

$$(r_{i-1}, u_i, Z_i) \to_M^{n_i} (r_i, \epsilon, \epsilon) \qquad (i = 1, \dots, k)$$

und $w' = u_1 \dots u_k$, $\sum n_i = n - 1$.

$$\begin{array}{lllll} \text{IA} & \Rightarrow & [r_{i-1}, Z_i, r_i] \to_G^{n_i} u_i & & \\ & \Rightarrow & [q, Z, p] & \to_G & b[r_0, Z_1, r_1] \dots [r_{k-1}, Z_k, r_k] \\ & & & \to_G^{n-1} & bu_1 \dots u_k = w \end{array}$$

□

Damit haben wir bewiesen:

Satz 3.62
Eine Sprache ist kontextfrei gdw sie von einem Kellerautomaten akzeptiert wird.

3.10 Deterministische Kellerautomaten

Definition 3.63

Ein PDA heißt deterministisch (DPDA) gdw für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $Z \in \Gamma$

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \epsilon, Z)| \leq 1$$

Beispiel 3.64

Der folgende DPDA mit $\Sigma = \{0, 1, \$\}$, $\Gamma = \{Z_0, 0, 1\}$ akzeptiert die Sprache .

Definition 3.65

Eine CFL heißt deterministisch (DCFL) gdw sie von einem DPDA akzeptiert wird.

Man kann zeigen: Die CFL $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ ist nicht deterministisch.

Da man jeden DFA leicht mit einem DPDA simulieren kann:

Fakt 3.66

Jede reguläre Sprache ist eine DCFL.

Eine Sprache erfüllt die Präfix Bedingung gdw wenn sie keine zwei Wörter enthält, so dass das eine ein *echtes* Präfix des anderen ist.

Beispiel 3.67

- Die Sprache a^* erfüllt die Präfix Bedingung nicht.
- Die Sprache $\{w\$w^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ erfüllt die Präfix Bedingung.

Lemma 3.68

$\exists$*DPDA* $M.\ L = L_\epsilon(M) \quad \Leftrightarrow$
$\exists$*DPDA* $M.\ L = L_F(M)$ *und* L *erfüllt die Präfix Bedingung*

Beweis: Übung!

Es gibt also einen DPDA M mit $L_F(M) = L(a^*)$ aber keinen DPDA mit $L_\epsilon(M) = L(a^*)$.

Satz 3.69

Die Klasse der DCFLs ist unter Komplement abgeschlossen.

Beweis: Komplex. Siehe zB Erk&Priese oder Kozen.

Da die CFLs *nicht* unter Komplement abgeschlossen sind:

Korollar 3.70

Die DCFLs sind eine echte Teilklasse der CFLs.

Hier ist eine konkrete Sprache in CFL$\setminus$DCFL:
Sei $L_{ww} := \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$.
Dann ist $L := \{a,b\}^* \setminus L_{ww}$ eine CFL aber keine DCFL.
L wird von folgender CFG erzeugt (ohne Beweis):

$$S \to AB \mid BA \mid A \mid B$$

$$A \to CAC \mid a \qquad B \to CBC \mid b \qquad C \to a \mid b$$

Wäre L eine DCFL, dann auch $\overline{L} = L_{ww}$ (wegen Satz 3.69).
Aber mit dem Pumping Lemma kann man zeigen,
dass L_{ww} keine CFL ist [HMU], und daher erst recht keine DCFL.

Lemma 3.71

Die Klasse der DCFLs ist weder unter Schnitt noch unter Vereinigung abgeschlossen.

Beweis:

Erinnerung: CFLs nicht unter Schnitt abgeschlossen:

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{a^i b^i c^j \mid i,j \in \mathbb{N}\} \text{ ist kontextfrei} \\ L_2 &:= \{a^i b^j c^j \mid i,j \in \mathbb{N}\} \text{ ist kontextfrei} \\ L_1 \cap L_2 &= \{a^i b^i c^i \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ ist nicht kontextfrei} \end{aligned}$$

Aber L_1 und L_2 sind sogar DCFLs.

Da $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ können die DCFLs auch nicht unter Vereinigung abgeschlossen sein. □

Lemma 3.72

Jede DCFL ist nicht inhärent mehrdeutig, dh sie wird von einer nicht-mehrdeutigen Grammatik erzeugt.

Beweisidee: Die Konversion PDA $\rightarrow$ CFG erzeugt aus einem DPDA eine nicht-mehrdeutige CFG. [HMU]

Satz 3.73

Das Wortproblem für DCFLs ist in linearer Zeit lösbar.

Mehr Information: Vorlesungen zum Übersetzerbau

3.11 Tabellarischer Überblick

Abschlusseigenschaften

	Schnitt	Vereinigung	Komplement	Produkt	Stern
Regulär	ja	ja	ja	ja	ja
DCFL	nein	nein	ja	nein	nein
CFL	nein	ja	nein	ja	ja

Entscheidbarkeit

	Wortproblem	Leerheit	Äquivalenz	Schnittproblem
DFA	$O(n)$	ja	ja	ja
DPDA	$O(n)$	ja	ja	nein(*)
CFG	$O(n^3)$	ja	nein(*)	nein(*)

Sénizergues (1997), Stirling (2001)

(*) Vorschau

3.12 Die Chomsky-Hierarchie

Definition 3.74

Eine Grammatik G ist ein 4-Tupel (V, Σ, P, S),
wobei P eine endliche Teilmenge von $(V \cup \Sigma)^+ \times (V \cup \Sigma)^+$ ist,
dh jede Produktion ist von der Form $\alpha \to \beta$.
G ist vom

- Typ 0
- Typ 1 falls $|\alpha| \leq |\beta|$
- Typ 2 falls G vom Typ 1 ist und $\alpha \in V$
- Typ 3 falls G vom Typ 2 ist und $\beta \in \Sigma \cup \Sigma V$.

Zusätzlich erlaubt man noch $S \to \epsilon$.

Offensichtlich gilt:

$$\text{Typ 3} \subset \text{Typ 2} \subset \text{Typ 1} \subset \text{Typ 0}$$

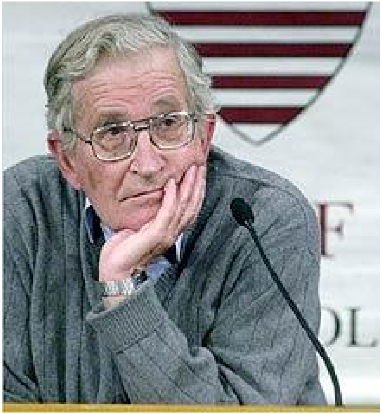
Grammatiken, Maschinen und Sprachklassen:

Typ 3	Rechtslineare Grammatik Endlicher Automat
Typ 2	kontextfreie Grammatik Kellerautomat
Typ 1	Kontextsensitive Grammatik Linear beschränkter Automat
Typ 0	Chomsky-Grammatik, Phrasenstrukturgrammatik Turingmaschine

Satz 3.75

$L(\textit{Typ 3}) \subset L(\textit{Typ 2}) \subset L(\textit{Typ 1}) \subset L(\textit{Typ 0})$

Noam Chomsky.
Three Models for the Description of Language. Transactions on Information Theory, 113-124, 1956.



Noam Chomsky (* 7. Dezember 1928) ist Professor für Linguistik am MIT und ein bedeutender Sprachwissenschaftler. Er entwickelte die Chomsky-Hierarchie.
Neben seiner linguistischen Arbeit gilt Chomsky als einer der bedeutendsten Intellektuellen Nordamerikas und ist als scharfer Kritiker der US-amerikanischen Außenpolitik bekannt.
Seine politische Heimat ist der Anarchosyndikalismus.
[Wikipedia]

Kapitel III Berechenbarkeit, Entscheidbarkeit, Komplexität

Überblick:

- Was kann man berechnen? Dh:
  Welche Funktionen kann man in endlicher Zeit berechnen?
- Mit welchen Sprachen/Maschinen?
- Welche Eigenschaften von Programmen sind entscheidbar?
  ZB Termination? Code-Erreichbarkeit? Überlauf?
- Was kann man in polynomieller Zeit berechnen?
  Mit welchen Maschinen?

1. Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit

1.1 Der Begriff der Berechenbarkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist intuitiv berechenbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$

- nach endlich vielen Schritten mit Ergebnis $f(n_1, \ldots, n_k)$ hält, falls $f(n_1, \ldots, n_k)$ definiert ist,
- und nicht terminiert, falls $f(n_1, \ldots, n_k)$ nicht definiert ist.

Was bedeutet „Algorithmus“? Assembler? C? Java? OCaml? Macht es einen Unterschied?

Achtung: Berechenbarkeit setzt zwei verschiedene Dinge in Beziehung:

- Algorithmen, dh endliche Wörter.
- Mathematische Funktionen, dh Mengen von Paaren.

ZB beschreibt $x \mapsto x^2$ die Funktion

$$\{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16), (5,25), \ldots\}$$

Terminologie: Eine Funktion $f : A \to B$ ist

total	gdw $f(a)$ für alle $a \in A$ definiert ist.
partiell	gdw $f(a)$ auch undefiniert sein kann.
echt partiell	gdw sie nicht total ist.

Beispiel 1.1

Der Algorithmus

```
input(n);
while true do ;
```

berechnet die überall undefinierte Funktion, dh $\emptyset \subset \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Beispiel 1.2

Ist die Funktion

$$f_1(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ als Ziffernfolge Anfangsstück der} \\ & \text{Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar? (Bsp: $f_1(31415) = 1$ aber $f_1(315) = 0$)

Ja, denn π kann iterativ auf beliebig viele Dezimalstellen genau berechnet werden.

Beispiel 1.3

Ist die Funktion

$$f_2(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ als Ziffernfolge irgendwo in der} \\ & \text{Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ vorkommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar? (Bsp: $f_2(415) = 1$) Unbekannt!

Durch schrittweise Approximation und Suche in der Dezimalbruchentwicklung von π kann man feststellen, *dass* n vorkommt.
Aber wie stellt man fest, dass n *nicht* vorkommt?
Nichttermination statt 0!

Vielleicht gibt es aber einen (noch zu findenden) mathematischen Satz, der genaue Aussagen über die in π vorkommenden Ziffernfolgen macht.

Beispiel 1.4

Ist die Funktion

$$f_3(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls mindestens } n \text{ mal hintereinander irgendwo in der} \\ & \text{Dezimalbruchentwicklung von } \pi \text{ eine 0 vorkommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar?

Ja, denn

- entweder kommt 0^n für beliebig große n vor, dann ist $f_3(n) = 1$ für alle n,
- oder es gibt eine längste vorkommende Sequenz 0^m, dann ist $f_3(n) = 1$ für $n \leq m$ und $f_3(n) = 0$ sonst.

Beide Funktionen sind berechenbar.

Dies ist ein nicht-konstruktiver Beweis:
Wir wissen, es gibt einen Algorithmus, der f_3 berechnet, aber wir wissen nicht, welcher.

Satz 1.5

Es gibt nicht-berechenbare Funktionen in $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$.

Beweis:

Es gibt nur abzählbar viele Algorithmen, aber überabzählbar viele Funktionen in $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ (Beweis wie zu Satz 1.8).

$\square$

Verschiedene Formalisierungen des Begriffs der Berechenbarkeit:

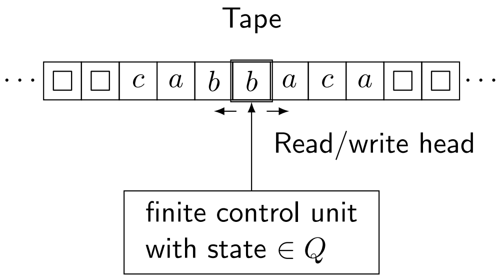
- Turing-Maschinen (Turing 1936)
- λ-Kalkül (Church 1936)
- μ-rekursive Funktionen
- Markov-Algorithmen
- Registermaschinen
- Awk, Basic, C, Dylan, Eiffel, Fortran, Java, Lisp, Modula, Oberon, Pascal, Python, Ruby, Simula, $\TeX$, ...-Programme
- while-Programme
- goto-Programme
- DNA-Algorithmen
- Quantenalgorithmen
- ...

Es wurde bewiesen: Alle diese Beschreibungsmethoden sind in ihrer Mächtigkeit äquivalent.

Churchsche These / Church-Turing These
Der formale Begriff der Berechenbarkeit mit Turing-Maschinen (bzw λ-Kalkül etc) stimmt mit dem intuitiven Berechenbarkeitsbegriff überein.

Ist formal prinzipiell nicht beweisbar.

1.2 Turingmaschinen



Definition 1.6

Eine Turingmaschine (TM) ist ein 7-Tupel
$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ so dass

- Q ist eine endliche Menge von Zuständen.
- Σ ist eine endliche Menge, das Eingabealphabet.
- Γ ist eine endliche Menge, das Bandalphabet, mit $\Sigma \subset \Gamma$
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ ist die Übergangsfunktion.
  δ darf partiell sein.
- $q_0 \in Q$ ist der Startzustand.
- $\Box \in \Gamma \setminus \Sigma$ ist das Leerzeichen.
- $F \subseteq Q$ ist die Menge der akzeptierenden oder Endzustände.

Annahme: $\delta(q, a)$ is nicht definiert für alle $q \in F$ und $a \in \Gamma$.

Eine nichtdeterministische Turingmaschine hat eine
Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R, N\})$.

Intuitiv bedeutet $\delta(q, a) = (q', b, d)$:

- Wenn sich M im Zustand q befindet,
- und auf dem Band a liest,
- so geht M im nächsten Schritt in den Zustand q' über,
- überschreibt a mit b,
- und bewegt danach den Schreib-/Lesekopf nach rechts (falls $d = R$), nach links (falls $d = L$), oder nicht (falls $d = N$).

Definition 1.7

Eine Konfiguration einer Turingmaschine ist ein Tripel $(\alpha, q, \beta) \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$.

Dies modelliert

- Bandinhalt: $\ldots \square \alpha \beta \square \ldots$
- Zustand: q
- Kopf auf dem ersten Zeichen von $\beta \square$

Die Startkonfiguration der Turingmaschine bei Eingabe $w \in \Sigma^*$ ist (ϵ, q_0, w).

Die Berechnung der TM M wird als Relation $\to_M$ auf Konfigurationen formalisiert. Falls $\delta(q, \mathit{first}(\beta)) = (q', c, d)$:

$$(\alpha, q, \beta) \to_M \begin{cases} (\alpha, q', c\ \mathit{rest}(\beta)) & \text{falls } d = N \\ (\alpha c, q', \mathit{rest}(\beta)) & \text{falls } d = R \\ (\mathit{butlast}(\alpha), q', \mathit{last}(\alpha)\ c\ \mathit{rest}(\beta)) & \text{falls } d = L \end{cases}$$

wobei

$$\begin{array}{ll} \mathit{first}(aw) = a & \mathit{first}(\epsilon) = \Box \\ \mathit{rest}(aw) = w & \mathit{rest}(\epsilon) = \epsilon \\ \mathit{last}(wa) = a & \mathit{last}(\epsilon) = \Box \\ \mathit{butlast}(wa) = w & \mathit{butlast}(\epsilon) = \epsilon \end{array}$$

für $a \in \Gamma$ und $w \in \Gamma^*$.

Falls M nichtdeterministisch ist: $\delta(q, \mathit{first}(\beta)) \ni (q', c, d)$

Beispiel 1.8 (Unär $+1$)

$$M = (\{q, f\}, \{1\}, \{1, \Box\}, \delta, q, \Box, \{f\})$$

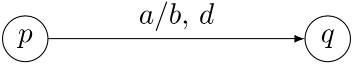
$$\begin{array}{rcl} \delta(q, \Box) & = & (f, 1, N) \\ \delta(q, 1) & = & (q, 1, R) \end{array}$$

- Beispiellauf:

  $$(\epsilon, q, 11) \rightarrow_M$$

- Welche Eingaben führen von q nach f?

Eine graphische Notation für $\delta(p, a) = (q, b, d)$:



Beispiel 1.9 (Binär $+1$)

ZB $1011 \mapsto 1100$

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{0,1\}, \{0,1,\Box\}, \delta, q_0, \Box, \{q_f\})$$

wobei

$$\begin{array}{llllll}
\delta(q_0,0) & = (q_0,0,R) & \delta(q_1,1) & = (q_1,0,L) & \delta(q_2,0) & = (q_2,0,L) \\
\delta(q_0,1) & = (q_0,1,R) & \delta(q_1,0) & = (q_2,1,L) & \delta(q_2,1) & = (q_2,1,L) \\
\delta(q_0,\Box) & = (q_1,\Box,L) & \delta(q_1,\Box) & = (q_f,1,N) & \delta(q_2,\Box) & = (q_f,\Box,R)
\end{array}$$

Beispiellauf:

$$\begin{array}{l}
(\epsilon, q_0, 101) \rightarrow_M (1, q_0, 01) \rightarrow_M (10, q_0, 1) \rightarrow_M (101, q_0, \epsilon) \rightarrow_M \\
(10, q_1, 1\Box) \rightarrow_M (1, q_1, 00\Box) \rightarrow_M \\
(\epsilon, q_2, 110\Box) \rightarrow_M (\epsilon, q_2, \Box 110\Box) \rightarrow_M \\
(\Box, q_f, 110\Box)
\end{array}$$

Definition 1.10

Eine Turingmaschine M akzeptiert die Sprache

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in F, \alpha, \beta \in \Gamma^*.\ (\epsilon, q_0, w) \to_M^* (\alpha, q, \beta)\}$$

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ heißt Turing-berechenbar gdw es eine Turingmaschine M gibt, so dass für alle $n_1, \ldots n_k, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} & f(n_1, \ldots, n_k) = m \quad \Leftrightarrow \\ & \exists r \in F.\ (\epsilon, q_0, bin(n_1)\#bin(n_2)\# \ldots \#bin(n_k)) \\ & \qquad \to_M^* (\Box \ldots \Box, r, bin(m)\Box \ldots \Box) \end{aligned}$$

wobei $bin(n)$ die Binärdarstellung der Zahl n ist.

Eine Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ heißt Turing-berechenbar gdw es eine Turingmaschine M gibt, so dass für alle $u, v \in \Sigma^*$ gilt

$$f(u) = v \quad \Leftrightarrow \quad \exists r \in F.\ (\epsilon, q_0, u) \to_M^* (\Box \ldots \Box, r, v\Box \ldots \Box)$$

Zum Halten/Terminieren von TM

Eine TM hält wenn sie eine Konfiguration $(\alpha, q, a\beta)$ erreicht und $\delta(q, a)$ nicht definiert oder (bei nichdetermistische TM) $\delta(q, a) = \emptyset$.

Nach Annahme hält eine TM immer, wenn sie einen Endzustand erreicht. Damit ist die von einer TM berechnete Funktion wohldefiniert.

Eine TM kann auch halten, bevor sie einen Endzustand erreicht.

Satz 1.11

Zu jeder nichtdeterministischen TM N gibt es eine deterministische TM M mit $L(N) = L(M)$.

Beweis:

M durchsucht den Baum der Berechnungen von N in *Breitensuche*, beginnend mit der Startkonfiguration (ϵ, q_0, w), eine Ebene nach der anderen.
Gibt es in dem Baum (auf Ebene n) eine Konfigurationen mit Endzustand, so wird diese (nach Zeit $O(c^n)$) gefunden. □

Satz 1.12

Die von Turingmaschinen akzeptierten Sprachen sind genau die Typ-0-Sprachen der Chomsky Hierarchie.

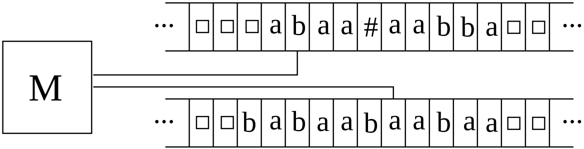
Beweis:

Wir beschreiben nur die Beweisidee. (Mehr Details: [Schöning]).

„$\Longrightarrow$“: Grammatikregeln können direkt die Rechenregeln einer TM simulieren.

„$\Longleftarrow$“: Die (nichtdeterministische) TM versucht von ihrer Eingabe aus das Startsymbol der Grammatik zu erreichen, indem sie die Produktionen der Grammatik von rechts nach links anwendet, (nichtdeterministisch) an jeder möglichen Stelle. $\square$

Eine beliebte Modellvariante ist die k-Band-Turingmaschine:



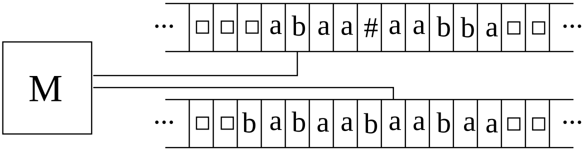
Die k Köpfe sind völlig unabhängig voneinander:

$$\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, N\}^k$$

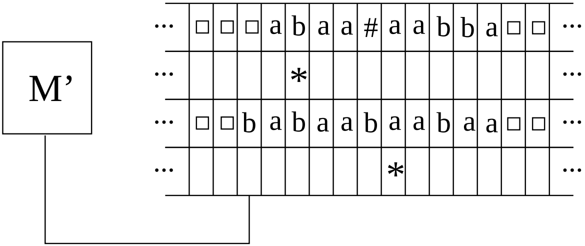
Satz 1.13

Jede k-Band-Turingmaschine kann effektiv durch eine 1-Band-TM simuliert werden.

Beweisidee: Aus



wird



Beweisskizze:

- $\Gamma' := (\Gamma \times \{\star, \square\})^k$
- M' simuliert einen M-Schritt durch mehrere Schritte: M'
  - startet mit Kopf links von allen $\star$.
  - geht nach rechts bis alle $\star$ überschritten sind,
    und merkt sich dabei (in Q') die Zeichen über jedem $\star$.
  - hat jetzt alle Information, um δ_M anzuwenden.
  - geht nach links über alle $\star$ hinweg und führt dabei δ_M aus.

Beobachtung:

n Schritte von M lassens sich durch
$O(n^2)$ Schritte von M' simulieren.

Denn nach n Schritten von M trennen $\leq 2n$ Felder linkesten und rechtesten Kopf. Obige Simulation eines M-Schritts braucht daher $O(n)$ M'-Schritte. Simulation von n Schritten: $O(n^2)$ Schritte.

1.3 Programmieren von Mehrband-TM

Die folgenden Basismaschinen sind leicht programmierbar:

- Band i := Band $i + 1$
- Band i := Band $i - 1$
- Band i := 0
- Band i := Band j

Seien $M_i = (Q_i, \Sigma, \Gamma_i, \delta_i, q_i, \Box, F_i)$, $i = 1, 2$.
Die sequentielle Komposition (Hintereinanderschaltung) von M_1 und M_2 bezeichnen wir mit

$$\longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow$$

Sie ist wie folgt definiert:

$$M := (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \delta, q_1, \Box, F_2)$$

wobei (oE) $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$ und

$$\delta := \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{(f_1, a) \mapsto (q_2, a, N) \mid f_1 \in F_1, a \in \Gamma_1\}$$

Sind f_1 und f_2 Endzustände von M so bezeichnet

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow & M & \xrightarrow{f_1} & M_1 & \longrightarrow \\ & \downarrow f_2 & & & \\ & M_2 & & & \\ & \downarrow & & & \end{array}$$

eine Fallunterscheidung, dh eine TM, die vom Endzustand f_1 von M nach M_1 übergeht, und von f_2 aus nach M_2.

Die folgende TM nennen wir „Band=0?“ (bzw „Band $i = 0$?“):

$$\begin{array}{rcll} \delta(q_0, 0) & = & (q_0, 0, R) & \\ \delta(q_0, \Box) & = & (ja, \Box, L) & \\ \delta(q_0, a) & = & (nein, a, N) & \quad \text{für } a \neq 0, \Box \end{array}$$

wobei ja und $nein$ Endzustände sind.

Analog zur Fallunterscheidung kann man auch eine TM für eine Schleife konstruieren

$$\begin{array}{lll} \longrightarrow & \text{Band } i = 0? & \xrightarrow{ja} \\ & \uparrow\downarrow nein & \\ & M & \end{array}$$

die sich wie `while` Band $i \neq 0$ `do` M verhält.

Moral: Mit TM kann man imperativ programmieren:

```
:=
;
if
while
```

1.4 LOOP-, WHILE- und GOTO-Berechenbarkeit

LOOP, WHILE	$\equiv$	strukturierte Programme mit `for`/`while`-Schleifen
GOTO	$\equiv$	Assembler

Syntax von LOOP-Programmen:

$$
\begin{array}{rcl}
P & \rightarrow & X \texttt{ := } X \texttt{ + } C \\
 & | & X \texttt{ := } X \texttt{ - } C \\
 & | & P\texttt{; } P \\
 & | & \texttt{IF } X = 0 \texttt{ DO } P \texttt{ ELSE} Q \texttt{ END} \\
 & | & \texttt{LOOP } X \texttt{ DO } P \texttt{ END}
\end{array}
$$

wobei X eine der Variablen $x_0, x_1, \ldots$
und C eine der Konstanten $0, 1, \ldots$ sein kann.

Beispiel 1.14

`LOOP` x_2 `DO` x_1 `:=` x_0`+1 END`

Die modifizierte Differenz ist $m \mathbin{\dot{-}} n \; := \begin{cases} m - n & \text{falls } m \geq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Semantik von LOOP-Programmen (informell):

x_i `:=` x_j `+` n Neuer Wert von x_i ist $x_j + n$.

x_i `:=` x_j `-` n Neuer Wert von x_i ist $x_j \mathbin{\dot{-}} n$.

P_1`;` P_2 Führe zuerst P_1 und dann P_2 aus.

`LOOP` x_i `DO` P `END` Führe P genau n mal aus, wobei n der *Anfangswert* von x_i ist. Zuweisungen an x_i in P ändern die Anzahl n der Schleifendurchläufe nicht.

Beispiel 1.15

`LOOP` x_0 `DO` x_1 `:=` x_1`+1 END` simuliert

Zu Beginn der Ausführung stehen die Eingaben in $x_1, \ldots, x_k$.
Alle anderen Variablen sind 0. Die Ausgabe wird in x_0 berechnet.

Definition 1.16

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist LOOP-berechenbar gdw es ein LOOP-Programm P gibt, so dass für alle $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$:

P, gestartet mit $n_1, \ldots, n_k$ in $x_1, \ldots, x_k$ (0 in den anderen Var.) terminiert mit $f(n_1, \ldots, n_k)$ in x_0.

Lemma 1.17

Alle LOOP-berechenbaren Funktionen sind total.

Beweis mit Induktion über die Erzeugung/Struktur der LOOP-Programme.

Sind alle totalen Funktionen LOOP-berechenbar?

Syntaktische Abkürzungen („Zucker"):

- x_i `:=` x_j $\quad\equiv\quad$ x_i `:=` x_j+0
- x_i `:=` n $\quad\equiv\quad$ x_i `:=` x_j+n
  (wobei an x_j nirgends zugewiesen wird)
- x_i `:=` x_j+x_k $\quad\equiv\quad$ x_i `:=` x_j`; LOOP` x_k `DO` x_i `:=` x_i+1
  (falls $i \neq k$)
- x_i `:=` x_j*x_k $\quad\equiv\quad$ x_i `:=` 0`; LOOP` x_k `DO` x_i `:=` x_i+x_j
  (falls $i \neq j, k$)
- `DIV`, `MOD`, ...
- x `:=` komplexer Ausdruck
- `IF` $x = 0$ `THEN` P `END`

WHILE-Programme sind LOOP-Programme erweitert um WHILE-Schleifen:

$$P \;\rightarrow\; \texttt{WHILE}\ X \neq 0\ \texttt{DO}\ P\ \texttt{END}$$

Die Semantik ist wie üblich.

Fakt 1.18

WHILE-Schleifen können LOOP-Schleifen simulieren.

Fakt 1.19

LOOP-Schleifen können WHILE-Schleifen nicht simulieren.

Definition 1.20

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist WHILE-berechenbar gdw es ein WHILE-Programm P gibt, so dass für alle $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$:

P, gestartet mit $n_1, \dots, n_k$ in $x_1, \dots, x_k$ (0 in den anderen Var.)

- terminiert mit $f(n_1, \dots, n_k)$ in x_0,
  falls $f(n_1, \dots, n_k)$ definiert ist,
- terminiert nicht, falls $f(n_1, \dots, n_k)$ undefiniert ist.

Turingmaschinen können WHILE-Programme simulieren:

Satz 1.21 (WHILE $\to$ TM)

Jede WHILE-berechenbare Funktion ist auch Turing-berechenbar.

Beweis:

Jede Programmvariable wird auf einem eigenen Band gespeichert. Wir haben bereits gezeigt: Alle Konstrukte der WHILE-Sprache können von einer Mehrband-TM simuliert werden, und eine Mehrband-TM kann von einer 1-Band TM simuliert werden. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
\text{GOTO} & & \text{TM} \\
& \text{WHILE} \arrow[ur] & \\
& \text{LOOP} \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Übersetzungen

Ein GOTO-Programm ist eine Sequenzen von markierten Anweisungen

$$M_1 : A_1;\ M_2 : A_2;\ \ldots;\ M_k : A_k$$

(wobei alle Marken verschieden und optional sind)

Mögliche Anweisungen A_i sind:

- x_i `:=` x_j `+` n
- x_i `:=` x_j `-` n
- `GOTO` M_i
- `IF` $x_i = n$ `GOTO` M_j
- `HALT`

Die Semantik ist wie erwartet.

Fakt 1.22 (WHILE $\rightarrow$ GOTO)

Jedes WHILE-Programm kann durch ein GOTO-Programm simuliert werden.

Satz 1.23 (GOTO $\to$ WHILE)

Jedes GOTO-Programm kann durch ein WHILE-Programm simuliert werden.

Beweis: Simuliere $M_1 : A_1;\ M_2 : A_2;\ \ldots;\ M_k : A_k$ durch

$$
\begin{array}{l}
pc\ \texttt{:=}\ 1\texttt{;} \\
\texttt{WHILE}\ pc \neq 0\ \texttt{DO} \\
\quad \texttt{IF}\ pc = 1\ \texttt{THEN}\ P_1\ \texttt{ELSE} \\
\quad \vdots \\
\quad \texttt{IF}\ pc = k\ \texttt{THEN}\ P_k\ \texttt{ELSE}\ pc := 0 \\
\texttt{END}
\end{array}
$$

wobei $A_i \mapsto P_i$ wie folgt definiert ist:

$$
\begin{array}{lcl}
x_i\ \texttt{:=}\ x_j\ \texttt{+/-}\ n & \mapsto & x_i\ \texttt{:=}\ x_j\ \texttt{+/-}\ n\texttt{;}\ pc\ \texttt{:=}\ pc\texttt{+}1 \\
\texttt{GOTO}\ M_i & \mapsto & pc\ \texttt{:=}\ i \\
\texttt{IF}\ x_j = 0\ \texttt{GOTO}\ M_i & \mapsto & \texttt{IF}\ x_j = 0 \\
 & & \texttt{THEN}\ pc\texttt{:=}i\ \texttt{ELSE}\ pc\texttt{:=}pc\texttt{+}1\ \texttt{END} \\
\texttt{HALT} & \mapsto & pc\ \texttt{:=}\ 0
\end{array}
$$

□

Korollar 1.24

WHILE- und GOTO-Berechenbarkeit sind äquivalent.

Korollar 1.25 (Kleenesche Normalform)

Jedes WHILE-Programm ist zu einem WHILE-Programm mit genau einer WHILE-Schleife äquivalent.

$$\begin{tikzcd}
\text{GOTO} \arrow[dr, hook, shift left] & & \text{TM} \\
& \text{WHILE} \arrow[ul, hook, shift left] \arrow[ur, hook] & \\
& \text{LOOP} \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

Übersetzungen

Satz 1.26 (TM $\rightarrow$ GOTO)

Jede TM kann durch ein GOTO-Programm simuliert werden.

Übersetzung einer TM $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ in ein GOTO-Programm. Zeichen und Zeichenreihen werden als Zahlen kodiert.

$$Q = \{q_0, \dots, q_k\} \qquad \Gamma = \{a_0(= \Box), \dots, a_n\}$$

Eine Konfiguration

$$(a_{i_p} \dots a_{i_1},\ q_l,\ a_{j_1} \dots a_{j_q})$$

wird durch die Programmvariablen x, y, z wie folgt repräsentiert:

$$x = (i_p \dots i_1)_b, \quad y = (j_q \dots j_1)_b, \quad z = l$$

wobei $(i_p \dots i_1)_b$ die Zahl $i_p \dots i_1$ zur Basis $b := n + 1$ ist:

$$x = \sum_{r=1}^{p} i_r b^{r-1}$$

Der Kern des GOTO-Programms ist die iterierte Simulation von δ:

$$
\begin{array}{ll}
M: & \texttt{IF } z \in F \texttt{ GOTO } M_{end}\texttt{;} \\
 & a \texttt{ := } y \texttt{ MOD } b\texttt{;} \\
 & \texttt{IF } z = 0 \texttt{ AND } a = 0 \texttt{ GOTO } M_{00}\texttt{;} \\
 & \texttt{IF } z = 0 \texttt{ AND } a = 1 \texttt{ GOTO } M_{01}\texttt{;} \\
 & \ldots \\
 & \texttt{IF } z = k \texttt{ AND } a = n \texttt{ GOTO } M_{kn}\texttt{;} \\
M_{00}: & P_{00}\texttt{; GOTO } M\texttt{;} \\
M_{01}: & P_{01}\texttt{; GOTO } M\texttt{;} \\
 & \ldots \\
M_{kn}: & P_{kn}\texttt{; GOTO } M
\end{array}
$$

wobe P_{ij} die Simulation von $\delta(q_i, a_j) = (q_r, a_s, d)$ ist. Für $d = L$:

z := r;	Zustand aktualisieren
y := y DIV b;	Löschen von a_j
y := b*y + s;	Schreiben von a_s
y := b*y + (x MOD b);	Bewegung L (I): Einfügen von a_{i_1} in y
x := x DIV b	Bewegung L (II): Löschen von a_{i_1} aus x

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{GOTO} \arrow[dr, shift left] & & \mathsf{TM} \arrow[ll, blue] \\
& \mathsf{WHILE} \arrow[ul, shift left] \arrow[ur] & \\
& \mathsf{LOOP} \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Übersetzungen

1.5 Primitiv rekursive Funktionen

Klassen von Programmiersprachen

Imperativ	Funktional
C, Java,. . .	OCaml, Lisp, . . .
TM, WHILE, GOTO	μ-rekursiv
LOOP	Primitiv rekursiv

Wir betrachten Funktionen $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $k \geq 0$.
Wir identifizieren $\mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ mit $\mathbb{N}$ und $c()$ mit c.

Definition der primitiv rekursiven Funktionen:

Fixe Basisfunktionen zB $s(x) = x + 1$

Funktionskomposition zB $f(x, y) = g(x, h(x, y))$

Fixe Art der Rekursion zB
$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(n+1) &= n * f(n) \end{aligned}$$

Definition 1.27 (Basisfunktionen)

- Die konstante Funktion 0
- Die Nachfolgerfunktion $s(n) = n + 1$
- Die Projektionsfunktionen $\pi_i^k : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k$:

$$\pi_i^k(x_1, \ldots, x_k) = x_i$$

Definition 1.28

Die Komposition von g und $h_1, \ldots, h_k$ erzeugt die Funktion f

$$f(\overline{x}) \;=\; g(h_1(\overline{x}), \ldots, h_k(\overline{x}))$$

wobei $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \\ &g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \\ &h_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \qquad (i = 1, \ldots, k) \end{aligned}$$

Definition 1.29

Das Schema der primitiven Rekursion erzeugt aus g und h die Funktion f

$$\begin{aligned} f(0, \overline{x}) &= g(\overline{x}) \\ f(m+1, \overline{x}) &= h(f(m, \overline{x}), m, \overline{x}) \end{aligned}$$

wobei $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und

$$f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$$
$$g : \mathbb{N}^{n} \to \mathbb{N}$$
$$h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$$

Definition 1.30 (PR)

Die Menge PR der primitiv rekursiven Funktionen ist die folgende induktiv definierte Teilmenge aller Funktionen $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $k \geq 0$:

- Die Basisfunktionen 0, s, und π_i^k sind primitiv rekursiv.
- Sind g und h_i primitiv rekursiv, dann auch ihre Komposition

$$f(\overline{x}) \;=\; g(h_1(\overline{x}), \ldots, h_k(\overline{x}))$$

- Sind g und h primitiv rekursiv, dann auch die mit primitiver Rekursion definierte Funktion

$$\begin{aligned} f(0, \overline{x}) \;&=\; g(\overline{x}) \\ f(m+1, \overline{x}) \;&=\; h(f(m, \overline{x}), m, \overline{x}) \end{aligned}$$

Lemma 1.31

Jede primitiv-rekursive Funktion ist total.

Beweis:

Induktion über den Aufbau der primitiv-rekursiven Funktionen. □

Beispiel 1.32

Alle Konstanten $n \in \mathbb{N}$ sind PR: $1 = s(0)$, $2 = s(1)$, ...

Addition ist PR:

$$\begin{array}{rcl} h(r,x,y) & = & s(\pi^3_1(r,x,y)) \\ add(0,y) & = & \pi^1_1(y) \\ add(x+1,y) & = & h(add(x,y),x,y) \end{array}$$

Lesbarer, aber nicht dem syntaktischen PR-Format entsprechend:

$$\begin{array}{rcl} add(0,y) & = & y \\ add(x+1,y) & = & s(add(x,y)) \end{array}$$

Streng genommen also kein Nachweis, dass Addition PR ist.

Beispiel 1.33

Multiplikation ist PR:

$$
\begin{array}{rcl}
k(y) & = & 0 \\
h(r,x,y) & = & add(\pi^3_1(r,x,y),\pi^3_3(r,x,y)) \\
mult(0,y) & = & k(y) \\
mult(x+1,y) & = & h(mult(x,y),x,y)
\end{array}
$$

Lesbarer, aber nicht dem syntaktischen PR-Format entsprechend:

$$
\begin{array}{rcl}
mult(0,y) & = & 0 \\
mult(x+1,y) & = & add(mult(x,y),y)
\end{array}
$$

In Zukunft: $+$ und $*$ statt add und $mult$.

Definition 1.34

Wir bezeichen f als eine erweiterte Komposition der Funktionen $g_1, \ldots, g_k$ falls

$$f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; t$$

so dass t ein Ausdruck ist, der nur aus den Funktionen $g_1, \ldots, g_k$ und den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ besteht.

Beispiel: $f(x, y) = g_1(x, g_2(y, g_3(x)))$

Lemma 1.35

Eine erweiterte Komposition von PR Funktionen ist wieder PR.

Beweis:

Mit Induktion über Aufbau/Größe von t. □

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} h_1(x, y) & = & g_3(\pi_1^2(x, y)) \\ h_2(x, y) & = & g_2(\pi_2^2(x, y), h_1(x, y)) \\ f(x, y) & = & g_1(\pi_1^2(x, y), h_2(x, y)) \end{array}$$

Das erweiterte Schema der primitiven Rekursion erlaubt

$$\begin{aligned} f(0, \overline{x}) &= t_0 \\ f(m+1, \overline{x}) &= t \end{aligned}$$

wobei

- t_0 enthält nur PR Funktionen und die x_i,
- t enthält nur $f(m, \overline{x})$, PR Funktionen, m und die x_i.

Lemma 1.36

Das erweiterte Schema der primitiven Rekursion führt nicht aus PR hinaus.

Beweis:

Mit Hilfe der erweiterten Komposition. □

Moral:

Primitive Rekursion erlaubt
$f(m+1, \overline{x}) = \ldots f(m, \overline{x}) \ldots$

Beispiel 1.37

Die Vorgängerfunktion ist PR:

$$\begin{array}{rcl} pred(0) & = & 0 \\ pred(x+1) & = & x \end{array}$$

Die modifizierte Differenz ist PR:

$$\begin{array}{rcl} x \mathbin{\dot{-}} 0 & = & x \\ x \mathbin{\dot{-}} (y+1) & = & pred(x \mathbin{\dot{-}} y) \end{array}$$

Definition 1.38

Sei $P(x)$ ein Prädikat, d.h. ein logischer Ausdruck, der in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{N}_0$ den Wert **true** oder **false** liefert. Dann können wir P in natürlicher Weise eine Funktion

$$\hat{P} : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$$

zuordnen: $\hat{P}(x) = 1$ gdw $P(x) =$ **true**.

Wir nennen P primitiv rekursiv genau dann, wenn $\hat{P}$ primitiv rekursiv ist.

Ist P primitiv rekursiv, dann auch der beschränkte max-Operator

$$\max\{x \leq n \mid P(x)\} \;=:\; q(n)$$

wobei $\max\emptyset := 0$.

$$\begin{aligned}
q(0) &= 0 \\
q(n+1) &= q(n) + \hat{P}(n+1) * ((n+1) \dot{-} q(n)) \\
&= \begin{cases} n+1 & \text{falls } P(n+1) \\ q(n) & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ist P primitiv rekursiv, dann auch der beschränkte Existenzquantor

$$\exists x \leq n.\ P(x) \quad =: \ Q(n)$$

denn:

$$\begin{array}{rcl}\hat{Q}(0) & = & \hat{P}(0) \\ \hat{Q}(n+1) & = & \hat{Q}(n) + \hat{P}(n+1) * (1 \mathbin{\dot{-}} \hat{Q}(n)) \\ & = & \begin{cases} 1 & \text{falls } P(n+1) \\ \hat{Q}(n) & \text{sonst} \end{cases}\end{array}$$

1.6 PR = LOOP

Hauptproblem bei LOOP $\to$ PR:
Kodierung *aller* Variablen eines LOOP Programms in *einer* Zahl.

Satz 1.39
Die Cantorsche Paarungsfunktion

$$c(x,y) := \binom{x+y+1}{2} + x = (x+y)(x+y+1)/2 + x$$

ist eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}^2$ *und* $\mathbb{N}$*.*

	0	1	2	3	$\dots$
0	0	2	5	9	$\dots$
1	1	4	8	13	$\dots$
2	3	7	12	18	$\dots$
3	6	11	17	24	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Die Funktion $x \mapsto \binom{x}{2}$ ist PR:

$$\begin{aligned} \binom{0}{2} &= 0 \\ \binom{n+1}{2} &= \binom{n}{2} + n \end{aligned}$$

Mit Komposition ist auch c PR:

$$c(x,y) = \binom{x+y+1}{2} + x$$

Mit c kodiert man $k+1$ Tupel:

$$\langle n_0, n_1, \ldots, n_k \rangle \;:=\; c(n_0, c(n_1, \ldots, c(n_k, 0) \ldots))$$

Wir brauchen die Umkehrfunktionen p_1 und p_2 von c:

$$p_1(c(x,y)) = x \qquad p_2(c(x,y)) = y$$

Damit kann man Projektionsfunktionen auf Tupeln definieren:

$$\begin{array}{rcl} d_0(n) & := & p_1(n) \\ d_1(n) & := & p_1(p_2(n)) \\ & \vdots & \\ d_k(n) & := & p_1(\underbrace{p_2 \ldots p_2(}_{k} n) \ldots) \end{array}$$

Sind p_1, p_2 PR, so auch $d_0, \ldots, d_k$.

Satz 1.40

Die Umkehrfunktionen von c sind PR definierbar:

$$
\begin{aligned}
p_1(n) &= max\{x \leq n \mid \exists y \leq n.\ c(x,y) = n\} \\
p_2(n) &= max\{y \leq n \mid \exists x \leq n.\ c(x,y) = n\}
\end{aligned}
$$

Beweis:

Alle Funktionen in der Definition der p_i sind PR,
auch der Gleichheitstest (Übung!).
Die p_i sind die Umkehrfunktionen von c denn:

- Es gibt zu jedem n eindeutige x und y mit $c(x,y) = n$.
  (Bijektivität von c)
- $x \leq c(x,y)$ und $y \leq c(x,y)$.

Damit findet die beschränkte Suche immer die gesuchten x und y.

□

Satz 1.41 (PR = LOOP)

Die primitiv rekursiven sind genau die LOOP-berechenbaren Funktionen.

Beweis:

LOOP $\to$ PR:

Sei $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ LOOP-berechenbar.

Dann gibt es ein LOOP-Programm P (mit Variablen $x_0, \ldots, x_k$), das f berechnet.

Mit Induktion über die Struktur von P konstruieren wir eine PR Funktion g_P mit

$$g_P(\underbrace{\langle a_0, \ldots, a_k \rangle}_{\substack{\text{Belegung der Variablen} \\ \text{beim Start von } P}}) \quad = \quad \underbrace{\langle b_0, \ldots, b_k \rangle}_{\substack{\text{Belegung der Variablen} \\ \text{am Ende von } P}}$$

Beweis (Forts.):

- P ist x_i `:=` $x_j \pm c$:

$$g_P(x) = \langle d_0(x), \ldots, d_{i-1}(x), d_j(x) \pm c, d_{i+1}(x), \ldots, d_k(x) \rangle$$

- P ist Q `;` R: $\quad g_P(x) = g_R(g_Q(x))$
- P ist `LOOP` x_i `DO` Q `END`:

$$\begin{array}{rcl} h(0, x) & = & x \\ h(n+1, x) & = & g_Q(h(n, x)) \\ g_P(x) & = & h(d_i(x), x) \end{array}$$

$g_P(x)$ berechnet den Zustand nach $d_i(x)$ Iterationen von Q.

Berechnet P die Funktion $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, dann ist f PR denn

$$f(x_1, \ldots, x_m) = d_0(g_P(\langle 0, x_1, \ldots x_m, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-m} \rangle)).$$

Beweis (Forts.): PR $\rightarrow$ LOOP

Sei $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ PR.

Mit Induktion über die Erzeugung von f konstruieren wir ein LOOP-Programm P_f, das f berechnet:

- 0:

  x_0 := 0

- Nachfolger-Funktion:

  x_0 := x_1 + 1

- Projektions-Funktionen, zB $\pi^3_2(x_1, x_2, x_3) = x_2$:

  x_0 := x_2

- Komposition, zB $f(x_1, x_2) = g(h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2))$:

  P_{h_1}; x_{15} := x_0; P_{h_2}; x_1 := x_{15}; x_2 := x_0; P_g

  Funktions-Komposition wird simuliert durch Hintereinanderausführung (;) wobei Argumente und Zwischenergebnisse in separaten Variablen zwischengespeichert werden müssen.

Beweis (Forts.):

- Primitive Rekursion:

$$
\begin{aligned}
f(0,\overline{x}) &= g(\overline{x}) \\
f(y+1,\overline{x}) &= h(f(y,\overline{x}),y,\overline{x})
\end{aligned}
$$

Folgendes LOOP-Programm berechnet $f(y,\overline{x})$:

$$
\begin{array}{l}
r \ \texttt{:=}\ g(\overline{x})\texttt{;} \\
k \ \texttt{:=}\ \texttt{0;} \\
\texttt{LOOP}\ y\ \texttt{DO} \\
\quad r \ \texttt{:=}\ h(r,k,\overline{x}) \\
\quad k \ \texttt{:=}\ k+1\texttt{;} \\
\texttt{END} \\
x_0 \ \texttt{:=}\ r
\end{array}
$$

wobei wir nach Induktionsannahme LOOP-Programme zur Berechnung von g und h konstruieren können.
(Schönings Programm falsch!)

$\square$

Reversible Kodierung endlicher Zahlenfolgen als Zahlen:

$\{0,\ldots,k\}^*$ Kodiere $(i_1,\ldots,i_n)$ als Zahl $i_1\ldots i_n$ zur Basis k.

$\mathbb{N}^n$ Mit iterierter Paarfunktion c: $\langle i_1,\ldots,i_n\rangle$
NB n muss beim Dekodieren bekannt sein denn zB
$1=c(0,1)=c(0,c(0,1))$.

$\mathbb{N}^*$ Auch mit $\langle\ldots\rangle$ reversibel kodierbar (Übung)

$\mathbb{N}^*$ Kodiere $(i_1,\ldots,i_n)$ als $2^{i_1}3^{i_2}\cdots p_n^{i_n}$
wobei p_n die n-te Primzahl ist.
Dekodierung $=$ Primzahlzerlegung

1.7 Die μ-rekursiven Funktionen

- Mit PR kann man nur beschränkt suchen: $n, \ldots, 0$.
- Die *unbeschränkte* Suche $0, \ldots$ erfordert so etwas wie

$$f(n) \;=\; \ldots f(n+1) \ldots$$

- Der μ-Operator formalisiert diese Art der Suche.
- Damit erhält man alle berechenbaren Funktionen.
- Andere Such- bzw Rekursionsschemata sind (im Prinzip!) nicht notwendig.

Notation: $f(n) = \perp$ bedeutet „$f(n)$ ist undefiniert."

Definition 1.42 (μ-Operator)

Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ eine (nicht notwendigerweise totale) Funktion. Die durch Anwendung des μ-Operators entstehende Funktion $\mu f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist definiert durch:

$$\overline{x} \mapsto \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n, \overline{x}) = 0\} & \text{falls} \\ \qquad \text{ein solches } n \text{ existiert und} \\ \qquad f(m, \overline{x}) \neq \bot \text{ für alle } m \leq n \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

Intuitiv: $\mu f(\overline{x}) = find(0, \overline{x})$

$find(n, \overline{x}) = \mathbf{if}\ f(n, \overline{x}) = 0\ \mathbf{then}\ n\ \mathbf{else}\ find(n+1, \overline{x})$

Beispiel 1.43

Ist $f(n, x) = x \dot{-} (n + n)$

dann ist $\mu f(x) =$

Definition 1.44 (μR)

Die Menge der μ-rekursiven Funktionen ist die kleinste Teilmenge aller (nicht notwendigerweise totalen) Funktionen, die die Basisfunktionen (0, $+1$, π_i^k) enthält und alle Funktionen, die man hieraus durch (evtl. wiederholte) Anwendung von Komposition, primitiver Rekursion oder des μ-Operators erzeugen kann.

Satz 1.45 (μR = WHILE)

Die μ-rekursiven sind genau die WHILE-berechenbaren Funktionen.

Beweis: als Ergänzung des Beweises von PR = LOOP.

μR $\to$ WHILE:

Fall μf: Nach IA gibt es ein WHILE-Programm für f.

Dann ist μf auch WHILE-berechenbar:

x_0 := 0; y := $f(0, \overline{x})$;

WHILE $y \neq 0$ DO x_0 := x_0 + 1; y := $f(x_0, \overline{x})$ END

Beweis (Forts.):

WHILE $\rightarrow \mu$R:
Fall P ist `WHILE` $x_i \neq 0$ `DO` Q `END`
Nach IA gibt es eine Funktion g_Q die Q berechnet.
Dann ist g_P wie folgt definierbar:

$$\begin{array}{rcl} h(0,x) & = & x \\ h(n+1,x) & = & g_Q(h(n,x)) \\ h_i(n,x) & = & d_i(h(n,x)) \end{array}$$

$h_i(n,x)$ ist der Wert von x_i nach n Iterationen von Q.
Dh $\mu h_i(x)$ ist die Anzahl der Iterationen von Q bis $x_i = 0$,
dh bis P terminiert.

$$g_P(x) \quad = \quad h(\mu h_i(x), x)$$

$\square$

Durch die Transformation

$$\mu\text{R} \to \text{WHILE mit einer Schleife (Kleene)} \to \mu\text{R}$$

genügt also immer ein μ-Operator:

Korollar 1.46 (Kleene)

Für jede n-stellige μ-rekursive Funktionen f gibt es zwei $n+1$-stellige PR Funktionen h und h', so dass

$$f(\overline{x}) = h(\mu h'(\overline{x}), \overline{x})$$

1.8 Die Ackermann-Funktion

$$
\begin{array}{rcl}
a(0, n) & = & n+1 \\
a(m+1, 0) & = & a(m,1) \\
a(m+1, n+1) & = & a(m, a(m+1, n))
\end{array}
$$

- Dies ist keine PR Definition.
- Aber: $\not\Rightarrow$ a ist nicht PR
- Ziel: a ist berechenbar, total, aber nicht PR

Fakt 1.47

Die Ackermann-Funktion ist (OCaml-)berechenbar.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
&a(2,2) = \\
&a(1,a(2,1)) = \\
&a(1,a(1,a(2,0))) = \\
&a(1,a(1,a(1,1))) = \\
&a(1,a(1,a(0,a(1,0)))) = \\
&a(1,a(1,a(0,a(0,1)))) = \\
&a(1,a(1,a(0,2))) = \\
&a(1,a(1,3)) = \\
&a(1,a(0,a(1,2))) = \\
&a(1,a(0,a(0,a(1,1)))) = \\
&a(1,a(0,a(0,a(0,a(1,0))))) = \\
&a(1,a(0,a(0,a(0,a(0,1))))) = \\
&a(1,a(0,a(0,a(0,2)))) = \\
&a(1,a(0,a(0,3))) = \\
&a(1,a(0,4)) = \\
&a(1,5) = \\
&a(0,a(1,4)) = \\
&a(0,a(0,a(1,3))) = \\
&a(0,a(0,a(0,a(1,2)))) = \\
&a(0,a(0,a(0,a(0,a(1,1))))) = \\
&a(0,a(0,a(0,a(0,a(0,a(1,0)))))) = \\
&a(0,a(0,a(0,a(0,a(0,a(0,1)))))) = \\
&a(0,a(0,a(0,a(0,a(0,2))))) = \\
&a(0,a(0,a(0,a(0,3)))) = \\
&a(0,a(0,a(0,4))) = \\
&a(0,a(0,5)) = \\
&a(0,6) = \\
&7
\end{aligned}
$$

Scherzfrage: $a(6,6) =?$

Der Beginn:

$$\begin{array}{rcl} a(0,n) & = & n+1 \\ a(1,n) & = & 2+(n+3)-3 \\ a(2,n) & = & 2(n+3)-3 \\ a(3,n) & = & 2^{n+3}-3 \\ a(4,n) & = & \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n+3} -3 \\ a(5,n) & = & ??? \end{array}$$

Mit Induktion über n:

$$a(m+1,n) = \underbrace{a(m, a(m, \ldots a(m}_{n+1}, 1) \ldots)$$

Bsp: $a(1,n) = a(0, \ldots a(0,1) \ldots) = (+1)^{n+1}(1) = n+2$

Ackermann als Familie von Funktionen A_m: $A_m(n) := a(m, n)$.
Nun gilt:

$$\begin{array}{rcl} A_0(n) & = & s(n) \\ A_{m+1}(n) & = & A_m^{n+1}(1) = \underbrace{A_m(\ldots A_m}_{n+1}(1)\ldots) \end{array}$$

Beobachtung: alle A_m sind total und PR (mit Ind. über m)

Mit Currying (z.B. in Haskell):

```
a 0      n  =  n+1
a (m+1)  n  =  iter (n+1) (a m) 1

iter 0      f x  =
iter (n+1)  f x  =
```

Ackermann ist mit primitiver Rekursion höherer Stufe definierbar.

Man kann auch direkt zeigen:

Lemma 1.48

Die Ackermann-Funktion ist total.

Beweis:

Mit Induktion über m: $\forall n \in \mathbb{N}.\ a(m,n) \neq \perp$ (1)

- Basis: $a(0,n) = n + 1 \neq \perp$
- Schritt: $a(m+1,n) \neq \perp$ (2)

  Beweis mit Induktion über n:

  - $a(m+1,0) = a(m,1) \neq \perp$ wg (1)
  - $a(m+1,n+1) = a(m,a(m+1,n)) = a(m,k) \neq \perp$ wg (2) und (1)

$\square$

Lemma 1.49

Für jede PR Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gibt es ein $t \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall \overline{x} \in \mathbb{N}^k.\ f(\overline{x}) < a(t, \max \overline{x}).$$

Beweis:

Mit Induktion über den Aufbau der Definition von f. $\square$

Prinzip: $t \approx$ Länge der Definition von f.

Details: [Felscher. *Berechenbarkeit*]

Satz 1.50

Die Ackermann-Funktion ist nicht PR.

Beweis:

Indirekt. Angenommen a wäre doch PR. Dann ist auch f PR:

$$f(n) \ := \ a(n,n)$$

Nach obigem Lemma gibt es t mit $f(n) < a(t,n)$ für alle n.

$$f(t) < a(t,t) = f(t) \qquad \lightning$$

$\square$

Oberflächlich intuitiv:

Die Ackermann-Funktion wächst schneller als alle PR Funktionen.

Genauer:

Die Funktion $n \mapsto a(n,n)$ *wächst schneller als alle PR Funktionen.*

Intuitiver Grund:

- Für fixes t ist $n \mapsto a(t,n)$ PR, denn dies ist A_t.
- A_t braucht aber eine PR Definition der Länge $O(t)$.
- Um $n \mapsto a(n,n)$ PR zu berechnen, müsste die Länge der PR Definition dynamisch mit der Eingabe wachsen.

Da die Ackermann-Funktion total, berechenbar und nicht PR ist:

Korollar 1.51

Die PR Funktionen sind eine echte Teilklasse der berechenbaren totalen Funktionen.

Die berechenbaren Funktionen

berechenbar = TM = WHILE = GOTO = μR

total (zB Ackermann)

LOOP = PR

1.9 Entscheidbarkeit und das Halteproblem

Ziel: Es ist unentscheidbar ob ein Programm terminiert.

Definition 1.52

Eine Menge A ($\subseteq \mathbb{N}$ oder Σ^*) heißt entscheidbar gdw ihre charakteristische Funktion

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

berechenbar ist.

Eine Eigenschaft/Problem $P(x)$ heißt entscheidbar gdw $\{x \mid P(x)\}$ entscheidbar ist.

Fakt 1.53

Die entscheidbaren Mengen sind abgeschlossen unter Komplement: Ist A entscheidbar, dann auch $\overline{A}$.

Kodierung einer TM als Wort über $\Sigma = \{0, 1\}$, exemplarisch:

- Sei $\Gamma = \{a_0, \dots, a_k\}$ und $Q = \{q_0, \dots, q_n\}$.
- $\delta(q_i, a_j) = (q_{i'}, a_{j'}, d)$ wird kodiert als

  $$\#bin(i)\#bin(j)\#bin(i')\#bin(j')\#bin(m)$$

  wobei $bin : \mathbb{N} \to \{0, 1\}^*$ die Binärkodierung einer Zahl ist und $m = 0/1/2$ falls $d = L/R/N$.
- Kodierung von δ: Konkatenation der Kodierungen aller $\delta(., .) = (., ., .)$, in beliebiger Reihenfolge.
- Kodierung von $\{0, 1, \#\}^*$ in $\{0, 1\}^*$:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \mapsto & 00 \\ 1 & \mapsto & 01 \\ \# & \mapsto & 11 \end{array}$$

Die Kodierung TM $\to \{0,1\}^*$ ist nicht surjektiv,
dh nicht jedes Wort über $\{0,1\}^*$ kodiert eine TM.
Sei $\hat{M}$ eine beliebige feste TM.

Definition 1.54

Die zu einem Wort $w \in \{0,1\}^*$ gehörige TM M_w ist

$$M_w := \begin{cases} M & \text{falls } w \text{ Kodierung von } M \text{ ist} \\ \hat{M} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Kodierung von syntaktischen Objekten (Programmen, Formeln, etc) als Zahlen nennt man Gödelisierung und die Zahlen Gödelnummern.

Definition 1.55

$M[w]$ ist Abk. für „Maschine M mit Eingabe w“

$M[w]{\downarrow}$ bedeutet, dass $M[w]$ terminiert/hält.

Definition 1.56 (Spezielles Halteproblem)

Gegeben: Ein Wort $w \in \{0,1\}^*$.

Problem: Hält M_w bei Eingabe w ?

Als Menge:

$$K := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[w]{\downarrow}\}$$

Satz 1.57

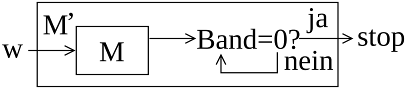
Das spezielle Halteproblem ist nicht entscheidbar.

Beweis:

Angenommen, K sei entscheidbar, dh χ_K ist berechenbar.
Dann ist auch f berechenbar:

$$f(w) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \chi_K(w) = 0 \\ \perp & \text{falls } \chi_K(w) = 1 \end{cases}$$

Berechnet die TM M χ_K so berechnet M' f:



Dann gibt es ein w' mit $M_{w'} = M'$.

$$\begin{aligned} f(w') = \perp \quad &\Leftrightarrow \quad \chi_K(w') = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad M_{w'}[w']\downarrow \quad \Leftrightarrow \quad M'[w']\downarrow \quad \Leftrightarrow \quad f(w') = 1 \quad \lightning \quad \Box \end{aligned}$$

Definition 1.58 ((Allgemeines) Halteproblem)

Gegeben: Wörter $w, x \in \{0,1\}^*$.

Problem: Hält M_w bei Eingabe x ?

Als Menge:

$$H := \{w\#x \mid M_w[x]\downarrow\}$$

Satz 1.59

Das Halteproblem H ist nicht entscheidbar.

Beweis:

Wäre H entscheidbar, dann trivialerweise auch K:

$$\chi_K(w) = \chi_H(w, w)$$

□

Definition 1.60 (Reduktion)

Eine Menge $A \subseteq \Sigma^*$ ist reduzierbar auf eine Menge $B \subseteq \Gamma^*$ gdw es eine totale und berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt mit

$$\forall w \in \Sigma^*.\ w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$$

Wir schreiben dann $A \leq B$.

Intuition:

- B ist mindestens so schwer zu lösen wie A.
- Ist A unlösbar, dann auch B.
- Ist B lösbar, dann erst recht A.

Lemma 1.61

Falls $A \leq B$ und B ist entscheidbar, so ist auch A entscheidbar.

Beweis:

Es gelte $A \leq B$ mittels f und χ_B sei berechenbar.
Dann ist $\chi_B \circ f$ berechenbar und $\chi_A = \chi_B \circ f$:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} = \begin{cases} 1, & f(x) \in B \\ 0, & f(x) \notin B \end{cases} = \chi_B(f(x)) \qquad \square$$

Korollar 1.62

Falls $A \leq B$ und A ist unentscheidbar, dann ist auch B unentscheidbar.

Beispiel 1.63

Da $K \leq H$ (mit Reduktion $f(w) := w\#w$) und K unentscheidbar ist, ist auch H unentscheidbar.

Satz 1.64

Das Halteproblem auf leerem Band, H_0, ist unentscheidbar.

$$H_0 := \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w[\epsilon]\downarrow\}$$

Beweis:

Wir zeigen $K \leq H_0$ mit einer Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$.
$f(w)$ ist die Gödelnummer folgender TM:

Überschreibe die Eingabe mit w; führe M_w aus.

Dh f berechnet aus w die Kodierung w_1 einer TM, die w schreibt, und gibt die Kodierung von "$w_1; w$" zurück.
Damit ist f total und berechenbar.
Es gilt:

$$w \in K \;\Leftrightarrow\; M_w[w]\downarrow \;\Leftrightarrow\; M_{f(w)}[\epsilon]\downarrow \;\Leftrightarrow\; f(w) \in H_0$$

□

Fazit:

Es gibt keine allgemeine algorithmische Methode, um zu entscheiden, ob ein Programm terminiert.

Die Unentscheidbarkeit vieler Fragen über die Ausführung von Programmen folgt durch Reduktion des Halteproblems:

- Kann ein WHILE-Programm mit einer bestimmten Eingabe einen bestimmten Programmpunkt erreichen?
  Der Spezialfall Programmpunkt=Programmende ist das Halteproblem.
- Kann Variable x_7 bei einer bestimmten Eingabe je den Wert 2^{32} erreichen?
  Reduktion: Ein Programm P hält gdw
  während der Ausführung von
  $$P\texttt{;}\ \ x_7\ \texttt{:=}\ 2^{32}$$
  Variable x_7 den Wert 2^{32} erreicht.
  (OE: x_7 kommt in P nicht vor)

Quiz

Ist es entscheidbar, ob eine TM

1. mehr als 314 Zustände hat?
2. bei Eingabe ϵ mehr als 314 Schritte macht?
3. bei *irgendeiner* Eingabe mehr als 314 Schritte macht?
4. bei *allen* Eingaben mehr als 314 Schritte macht?
5. bei Eingabe ϵ ihren Kopf mehr als 314 Felder von der 0-Position entfernen kann?
6. bei Eingabe ϵ einen bestimmten Zustand erreichen kann?
7. *irgendeine* Eingabe akzeptieren kann?

Es müssen nicht immer TM sein:

Satz 1.65 (Matiyasevich 1970, Hilberts 10. Problem)

Es ist unentscheidbar, ob ein Polynom in n Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten eine ganzzahlige Nullstelle hat ($\in \mathbb{Z}^n$).

Beweis:

$$H \leq H_{10}$$

$\square$

Bemerkungen

- Nicht alle unentscheidbaren Probleme sind gleich schwer
- ZB gilt: Das Äquivalenzproblem

  $$Eq := \{u\#v \mid M_u \text{ berechnet die gleiche Funktion wie } M_v\}$$

  ist schwerer als das Halteproblem:

  $$H \leq Eq \qquad \text{aber} \qquad Eq \not\leq H$$

- Es gibt sogar eine unendliche Folge

  $$A_0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \cdots$$

  aber $A_{i+1} \not\leq A_i$.

1.10 Semi-Entscheidbarkeit

Definition 1.66

Eine Menge A ($\subseteq \mathbb{N}$ oder Σ^*) heißt semi-entscheidbar (s-e) gdw

$$\chi'_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ \perp & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

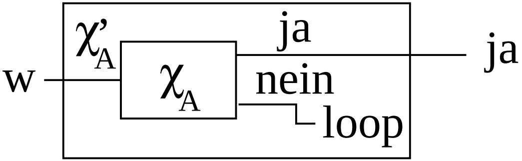
berechenbar ist.

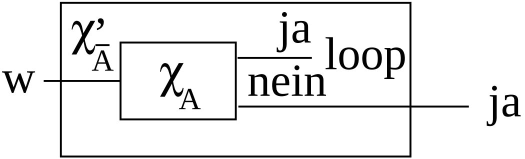
Satz 1.67

Eine Menge A ist entscheidbar gdw sowohl A als auch $\overline{A}$ s-e sind.

Beweis:

„⇒“: Wandle TM für χ_A in TM für χ'_A und $\chi'_{\overline{A}}$ um:





Beweis (Forts.):

„$\Leftarrow$“:

Wandle TM M_1 für χ'_A und TM M_2 für $\chi'_{\overline{A}}$ in TM für χ_A um:

input(x);
for $s := 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $M_1[x]$ hält in s Schritten **then** output(1); **halt fi** ;
  if $M_2[x]$ hält in s Schritten **then** output(0); **halt fi**

Formulierung mit Parallelismus:

input(x);
führe $M_1[x]$ und $M_2[x]$ parallel aus;
hält M_1, gib 1 aus, hält M_2, gib 0 aus. $\square$

Lemma 1.68

Ist $A \leq B$ und ist B s-e, so ist auch A s-e.

Beweis: Übung

Definition 1.69

Eine Menge A heißt rekursiv aufzählbar (*recursively enumerable*) gdw $A = \emptyset$ oder es eine berechenbare totale Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ gibt, so dass

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$$

Bemerkung:

- Es dürfen Elemente doppelt auftreten ($f(i) = f(j)$ für $i \neq j$)
- Die Reihenfolge ist beliebig.

Warnung: Rekursiv aufzählbar $\neq$ abzählbar!

- Rekursiv aufzählbar $\implies$ abzählbar
- Aber nicht umgekehrt:
  $\overline{K} \subseteq \{0, 1\}^*$ ist abzählbar aber nicht rekursiv aufzählbar (s.u.)

Lemma 1.70

Eine Menge A ist rekursiv aufzählbar gdw sie semi-entscheidbar ist.

Beweis:

Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial. Sei $A \neq \emptyset$.

„$\Rightarrow$“:
Sei A rekursiv aufzählbar mit f. Dann ist A semi-entscheidbar:

input(x);
for $i := 0, 1, 2, \ldots$ **do**
  if $f(i) = x$ **then** output(1); **halt fi**

„$\Leftarrow$“: Wir nehmen an $A \subseteq \mathbb{N}$.
Sei A semi-entscheidbar durch (zB) GOTO-Programm P.
Problem: $P[i]$ muss nicht halten und darf daher nur „zeitbeschränkt“ ausgeführt werden.
Gesucht: Paare (i, j) so dass $P[i]$ nach j Schritten hält.
Idee: Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dh Umkehrung von c.

Beweis (Forts.):

Sei $d \in A$ beliebig.
Folgender Algorithmus berechnet eine Aufzählung von A:

input(n);
if $P[p_1(n)]$ hält nach $p_2(n)$ Schritten **then** output($p_1(n)$)
else output(d) **fi**

Korrektheit:
Der Algorithmus hält immer und liefert immer ein Element aus A.

Vollständigktheit: Sei $a \in A \subseteq \mathbb{N}$.
Dann hält $P[a]$ nach einer endlichen Zahl k von Schritten.
Dann liefert die Eingabe $n = c(a, k)$ die Ausgabe a. $\square$

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- A ist semi-entscheidbar
- A ist rekursiv aufzählbar
- χ'_A ist berechenbar
- $A = L(M)$ für eine TM M
- A ist Definitionsbereich einer berechenbaren Funktion
- A ist Wertebereich einer berechenbaren Funktion

Satz 1.71

Die Menge $K = \{w \mid M_w[w]{\downarrow}\}$ *ist semi-entscheidbar.*

Beweis:

Die Funktion χ'_K ist wie folgt Turing-berechenbar:

Bei Eingabe w simuliere die Ausführung von $M_w[w]$;
gib 1 aus. $\square$

- Hier haben wir benutzt, dass man einen Interpreter/Simulator für Turingmaschinen als Turingmaschine programmieren kann.
- Ein solcher Interpreter wird oft eine Universelle Turingmaschine (U) genannt.

Korollar 1.72

$\overline{K}$ *ist nicht semi-entscheidbar.*

Semi-Entscheidbarkeit ist nicht abgeschlossen unter Komplement.

1.11 Die Sätze von Rice und Shapiro

Die von der TM M_w berechnete Funktion bezeichnen wir mit φ_w.
Wir betrachten implizit nur einstellige Funktionen.

Satz 1.73 (Rice)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.
Es gelte weder $F = \emptyset$ noch $F =$ alle ber. Funkt. („F nicht trivial“)
Dann ist unentscheidbar, ob die von einer gegebenen TM M_w berechnete Funktion Element F ist, dh ob $\varphi_w \in F$.

Nicht-triviale semantische Eigenschaften von Programmen sind unentscheidbar.

Beispiel 1.74

Es ist unentscheidbar, ob ein Programm

- irgendwo hält. $(F = \{\varphi_w \mid \exists x.\ M_w[x]{\downarrow}\})$
- überall hält. $(F = \{\varphi_w \mid \forall x.\ M_w[x]{\downarrow}\})$
- bei Eingabe 42 Ausgabe 42 produziert.

Warnung

Es ist entscheidbar, ob ein Programm

- länger als 5 Zeilen ist.
- eine Zuweisung an die Variable x_{17} enhält.

Im Satz von Rice geht es um die von einem Programm berechnete Funktion (Semantik),
nicht um den Programmtext (Syntax).

Beweis:

Wir zeigen $C_F := \{w \in \{0,1\}^* \mid \varphi_w \in F\}$ ist unentscheidbar.
Fall 1: $\Omega := (x \mapsto \bot) \notin F$.
Wähle $h \in F \neq \emptyset$ beliebig; sei u Kodierung einer TM mit $\varphi_u = h$.
Reduziere K auf C_F ($K \leq C_F$) mit $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$f(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

Speichere die Eingabe x auf einem getrennten Band;
schreibe $w\#w$ auf die Eingabe und führe U aus;
führe M_u auf x aus.

Damit gilt $\varphi_{f(w)} = \begin{cases} h & \text{falls } M_w[w]{\downarrow} \\ \Omega & \text{sonst} \end{cases}$ und damit

$$w \in K \;\Leftrightarrow\; M_w[w]{\downarrow} \;\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\; \varphi_{f(w)} \in F \;\Leftrightarrow\; f(w) \in C_F$$

$$(*) : \begin{cases} M_w[w]{\downarrow} \Rightarrow \varphi_{f(w)} = h \in F \\ \varphi_{f(w)} \in F \Rightarrow \varphi_{f(w)} = h \Rightarrow M_w[w]{\downarrow} \end{cases}$$

Beweis (Forts.):

Fall 2: $\Omega \in F$.
Wähle berechenbares $h \notin F$.
Zeige analog, dass $\overline{K} \leq C_F$. $\square$

Satz 1.75 (Rice-Shapiro)

Sei F eine Menge berechenbarer Funktionen.
Ist $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ semi-entscheidbar,
so gilt für alle berechenbaren f:
$f \in F \Leftrightarrow$ es gibt eine endliche Teilfunktion $g \subseteq f$ mit $g \in F$.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ mit Widerspruch.
Sei $f \in F$, so dass für alle endlichen $g \subseteq f$ gilt $g \notin F$.
Wir zeigen $\overline{K} \leq C_F$ womit C_F nicht semi-entscheidbar ist. $\lightning$

Beweis (Forts.):

Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

> Bei Eingabe t simuliere t Schritte von $M_w[w]$.
> Hält diese Berechnung in $\leq t$ Schritten, gehe in eine endlos Schleife, sonst berechne $f(t)$.

Wir zeigen

$$w \in \overline{K} \;\Leftrightarrow\; h(w) \in C_F$$

- $w \in \overline{K} \implies \neg M_w[w]{\downarrow} \implies \varphi_{h(w)} = f {\in} F \implies h(w) \in C_F$
- Falls $w \notin \overline{K}$ dann hält $M_w[w]$ nach t Schritten.
  Damit gilt: $\varphi_{h(w)}$ ist f eingeschränkt auf $\{0, \ldots, t-1\}$.
  Nach Annahme folgt $\varphi_{h(w)} \notin F$, dh $h(w) \notin C_F$.

Beweis (Forts.):

„$\Leftarrow$“ mit Widerspruch.
Sei f berechenbar, sei $g \subseteq f$ endlich mit $g \in F$, aber sei $f \notin F$.
Wir zeigen $\overline{K} \leq C_F$ womit C_F nicht semi-entscheidbar ist. ↯
Reduktion $\overline{K} \leq C_F$ mit $h : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$:
$h(w)$ ist die Kodierung folgender TM:

Bei Eingabe t, teste ob t im *endlichen* Def.ber. von g ist.
Wenn ja, berechne $f(t)$,
sonst simuliere $M_w[w]$ und berechne dann $f(t)$.

Wir zeigen

$$w \in \overline{K} \;\Leftrightarrow\; h(w) \in C_F$$

- $w \in \overline{K} \implies \neg M_w[w]{\downarrow} \implies \varphi_{h(w)} = g \in F \implies h(w) \in C_F$
- $w \notin \overline{K} \implies M_w[w]{\downarrow} \implies \varphi_{h(w)} = f \notin F \implies h(w) \notin C_F$

$\square$

Rice-Shapiro (in Kurzform): $C_F := \{w \mid \varphi_w \in F\}$ s-e $\implies$

$$f \in F \Leftrightarrow \text{es gibt endliche Funkt. } g \subseteq f \text{ mit } g \in F.$$

Ein Programm heißt terminierend gdw es für alle Eingaben hält.

Korollar 1.76

- *Die Menge der terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.*
- *Die Menge der nicht-terminierenden Programme ist nicht semi-entscheidbar.*

Beweis:

- $F :=$ Menge aller berechenbaren totalen Funktionen.
  Sei $f \in F$. Jede endliche $g \subseteq f$ ist echt partiell, dh $g \notin F$.
  Also kann C_F nicht semi-entscheidbar sein.
- $F :=$ Menge aller berechenbaren nicht-totalen Funktionen.
  Sei f total und berechenbar. Damit $f \notin F$.
  Aber jede endliche $g \subseteq f$ ist in F.
  Also kann C_F nicht semi-entscheidbar sein. $\square$

Grenzen automatischer Terminationsanalyse von Programmen

- Termination ist unentscheidbar (Rice):
  Klare Ja/Nein Antwort unmöglich.
- Termination ist nicht semi-entscheidbar (Rice-Shapiro):
  Es gibt kein Zertifizierungs-Programm,
  das alle terminierenden Programme erkennt.
- Nicht-Termination ist nicht semi-entscheidbar (Rice-Shapiro):
  Es gibt keinen perfekten *Bug Finder*,
  der alle nicht-terminierenden Programme erkennt.

Aber es gibt mächtige heuristische Verfahren, die für
relativ viele Programme aus der Praxis (Gerätetreiber)

- Termination beweisen können, oder
- Gegenbeispiele finden können.

1.12 Das Postsche Korrespondenzproblem

Gegeben beliebig viele Kopien der 3 „Spielkarten“

$$\begin{array}{|c|}\hline 001\\\hline 00\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|}\hline 10\\\hline 11\\\hline\end{array}\qquad\begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 010\\\hline\end{array}$$

gibt es dann eine Folge dieser Karten

$$\begin{array}{|c|}\hline \ldots\\\hline \ldots\\\hline\end{array}\quad\ldots\quad\begin{array}{|c|}\hline \ldots\\\hline \ldots\\\hline\end{array}$$

so dass oben und unten das gleiche Wort steht?

$$\begin{array}{|c|}\hline 001\\\hline 00\\\hline\end{array}\,\begin{array}{|c|}\hline 10\\\hline 11\\\hline\end{array}\,\begin{array}{|c|}\hline 001\\\hline 00\\\hline\end{array}\,\begin{array}{|c|}\hline 0\\\hline 010\\\hline\end{array}$$

Kurz: 1,2,1,3.

Definition 1.77 (Postsche Korrespondenzproblem, *Post's Correspondence Problem*, PCP)

Gegeben: Eine endliche Folge $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$, wobei $x_i, y_i \in \Sigma^+$.

Problem: Gibt es eine Folge von Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\}$, $n > 0$, mit $x_{i_1} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} \ldots y_{i_n}$?

Dann nennen wir $i_1, \ldots, i_n$ eine Lösung des Problems $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$.

Beispiel 1.78

- Hat $(1, 111)$, $(10111, 10)$, $(10, 0)$ eine Lösung? 2,1,1,3
- Hat $(b, ca), (a, ab), (ca, a), (abc, c)$ eine Lösung? 2,1,3,2,4
- Hat $(101, 01)$, $(101, 010)$, $(010, 10)$ eine Lösung? Nein!
- Hat $(10, 101)$, $(011, 11)$, $(101, 011)$ eine Lösung? [HMU]
- Hat $(1000, 10)$, $(1, 0011)$, $(0, 111)$, $(11, 0)$ eine Lösung? Ja, mit Länge 495.

Emil Post.
A Variant of a Recursively Unsolvable Problem.
Bulletin American Mathematical Society, 1946.

Emil Leon Post, 1897 (Polen) – 1954 (NY).

In einem Brief an Kurt Gödel, 1938:

> *For fifteen years I carried around the thought of astounding the mathematical world with my unorthodox ideas.*
>
> *...*
>
> *As for any claims I might make perhaps the best I can say is that I would have proved Gödel's Theorem in 1921 — had I been Gödel.*

Lemma 1.79

Das PCP ist semi-entscheidbar.

Beweis:

Zähle die möglichen Lösungen der Länge nach auf, und probiere jeweils, ob es eine wirkliche Lösung ist. □

Wir zeigen nun:

$$H \leq MPCP \leq PCP$$

wobei

Definition 1.80 (Modifiziertes PCP, MPCP)

Gegeben: wie beim PCP

Problem: Gibt es eine Lösung $i_1, \ldots, i_n$ mit $i_1 = 1$?

Satz 1.81

$$MPCP \leq PCP$$

Beweis:

Für $w = a_1 \dots a_n$:

$$
\begin{aligned}
\overline{w} &:= \#a_1\#a_2\# \dots \#a_n\# \\
\overleftharpoon{w} &:= a_1\#a_2\# \dots \#a_n\# \\
\overrightharpoon{w} &:= \#a_1\#a_2\# \dots \#a_n
\end{aligned}
$$

$$f((x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)) := ((\overline{x_1}, \overrightharpoon{y_1}), (\overleftharpoon{x_1}, \overrightharpoon{y_1}), \dots, (\overleftharpoon{x_k}, \overrightharpoon{y_k}), (\$, \#\$))$$

Satz 1.82

$$H \leq MPCP$$

Beweis:

- $(\#, \#q_0u\#)$
- (a, a) für alle $a \in \Gamma \cup \{\#\}$
- $(qa, q'a')$ falls $\delta(q,a) = (q', a', N)$
  $(qa, a'q')$ falls $\delta(q,a) = (q', a', R)$
  $(bqa, q'ba')$ falls $\delta(q,a) = (q', a', L)$, für alle $b \in \Gamma$
- $(\#, \Box\#)$, $(\#, \#\Box)$
- (aq, q), (qa, q) für alle $q \in F, a \in \Gamma$
- $(q\#\#, \#)$ für alle $q \in F$

Aus $H \leq PCP$ folgt direkt

Korollar 1.83

Das PCP ist unentscheidbar.

Korollar 1.84

Das PCP ist auch für $\Sigma = \{0, 1\}$ unentscheidbar

Beweis:

Wir nennen dies das 01-PCP und zeigen PCP $\leq$ 01-PCP.
Sei $\Sigma = \{a_1, \dots, a_m\}$ das Alphabet des gegebenen PCPs.

Abbildung auf ein 01-PCP:
$$\begin{aligned} \widehat{a_j} &:= 01^j \\ \widehat{a_{j_1} \dots a_{j_n}} &:= \widehat{a_{j_1}} \dots \widehat{a_{j_n}} \end{aligned}$$

Dann hat $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ eine Lösung gdw
$(\widehat{x_1}, \widehat{y_1}), \dots, (\widehat{x_k}, \widehat{y_k})$ eine Lösung hat.

„$\Rightarrow$“ klar, „$\Leftarrow$“ folgt da $\hat{\cdot} : \Sigma^* \to \{0,1\}^*$ injektive ist:

$$\begin{aligned} &\widehat{x_{i_1}} \dots \widehat{x_{i_n}} = \widehat{y_{i_1}} \dots \widehat{y_{i_n}} &\Longrightarrow& \\ &\widehat{x_{i_1} \dots x_{i_n}} = \widehat{y_{i_1} \dots y_{i_n}} &\Longrightarrow& \quad x_{i_1} \dots x_{i_n} = y_{i_1} \dots y_{i_n} \qquad \square \end{aligned}$$

Bemerkungen

- Das PCP ist entscheidbar falls $|\Sigma| = 1$
- Das PCP ist entscheidbar falls $k \leq 2$.
- Das PCP ist unentscheidbar falls $k \geq 7$.
- Für $k = 3, \ldots, 6$ ist noch offen, ob das PCP unentscheidbar ist.

1.13 Unentscheidbare CFG-Probleme

- Für DFAs ist fast alles entscheidbar:
  $L(A) = \emptyset$, $L(A) = L(B)$, ...
- Für TMs ist fast nichts entscheidbar:
  $L(M) = \emptyset$, $L(M_1) = L(M_2)$, ...
- Für CFGs ist manches entscheidbar ($L(G) = \emptyset$),
  und manches unentscheidbar: $L(G_1) = L(G_2)$, ...

Satz 1.85

Für CFGs G_1, G_2 sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?*
2. *Ist $|L(G_1) \cap L(G_2)| = \infty$?*
3. *Ist $L(G_1) \cap L(G_2)$ kontextfrei?*
4. *Ist $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?*
5. *Ist $L(G_1) = L(G_2)$?*

Beweis:

$K = (x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ wird abgebildet auf G_1

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & A\$B \\ A & \rightarrow & a_1 A x_1 \mid \cdots \mid a_k A x_k \\ A & \rightarrow & a_1 x_1 \mid \cdots \mid a_k x_k \\ B & \rightarrow & y_1^R B a_1 \mid \cdots \mid y_k^R B a_k \\ B & \rightarrow & y_1^R a_1 \mid \cdots \mid y_k^R a_k \end{array}$$

und G_2:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & a_1 S a_1 \mid \cdots \mid a_k S a_k \mid T \\ T & \rightarrow & 0T0 \mid 1T1 \mid \$ \end{array}$$

Beweis (Forts.):

$\square$

Satz 1.86

Für eine CFG G sind folgende Probleme unentscheidbar:

1. *Ist G mehrdeutig?*
2. *Ist $L(G)$ regulär?*
3. *Ist $L(G)$ deterministisch (DCFL)?*

Beweis:

1. *G mehrdeutig*: Sei $G_3 :=$ „$G_1 \cup G_2$“.
PCP lösbar $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G_3)$ ist mehrdeutig
„$\Rightarrow$“: Syntaxbäume von G_1 und G_2 disjunkt
„$\Leftarrow$“: G_1 und G_2 sind DCFG und damit nicht mehrdeutig
Damit ist $PCP \mapsto G_3$ Reduktion für $PCP \leq$ Mehrdeutigkeit.

2/3. *$L(G)$ regulär/deterministisch*: Sei $G_4 :=$ „$\overline{G_1} \cup \overline{G_2}$“.
PCP unlösbar $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset \Rightarrow L(G_4) = \Sigma^* \Rightarrow L(G_4)$ reg/det.
PCP lösbar $\Rightarrow L(G_1) \cap L(G_2)$ nicht CFL $\Rightarrow \overline{L(G_4)}$ nicht reg/det
$\Rightarrow L(G_4)$ nicht reg/det.
Damit ist $PCP \mapsto G_4$ Reduktion für $PCP \leq L(G)$ reg/det. $\square$

Satz 1.87

Für eine CFG G und einen RE α ist $L(G) = L(\alpha)$ unentscheidbar.

Beweis:

Im Beweis des vorherigen Satzes hatten wir eine Reduktion $PCP \mapsto G_4$ mit

$$PCP \text{ unlösbar } \Leftrightarrow L(G_4) = \Sigma^*.$$

Sei $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Dann reduziert $PCP \mapsto (G_4, (a_1| \ldots |a_n)^*)$ das PCP auf das Problem $L(G) = L(\alpha)$, $\square$

2. Komplexitätstheorie

- Was ist mit beschränkten Mitteln (Zeit&Platz) berechenbar?
- Wieviel Zeit&Platz braucht man,
  um ein bestimmtes Problem/Sprache zu entscheiden?
- **Komplexität eines Problems**, nicht eines Algorithmus.
- **Obere Schranken**: durch Angabe eines Algorithmus
  Bsp: $w \in L(G)$ für CFGs ist in Zeit $O(|w|^3)$ lösbar, mit CYK.
- **Untere Schranken**: schwierig ...
  Bsp: Palindrom-Test auf einer 1-Band TM braucht Zeit $\Theta(n^2)$
  Nicht hier.
- Einfluss des Maschinenmodells:
  Deterministisch oder Nichtdeterministisch

Polynomielle und exponentielle Komplexität

Taktfrequenz: 1GHz

Zeit	Problemgröße n 10	20	30	40	50	60
n	.01 ms	.02 ms	.03 ms	.04 ms	.05 ms	.06 ms
n^2	.1 ms	.4 ms	.9 ms	1.6 ms	2.5 ms	3.6 ms
n^5	100ms	0.003s	0.02s	0.1 s	0.3 s	0.7 s
2^n	1 ms	0.001s	1 s	18 m	13 T	36 J
3^n	59 ms	3 s	2 T	385J	$2 \cdot 10^7$J	10^{12}J

ms=Mikrosek., s=Sek., m=Minute, T=Tag, J=Jahr

Problemgröße lösbar in fester Zeit: Speedup

Komplexität	n	n^2	n^5	2^n	3^n
1 MHz Prozessor	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
1 GHz Prozessor	1000 N_1	32 N_2	4 N_3	$N_4 + 10$	$N_5 + 6$

Zwei zentrale Komplexitätsklassen:

P = die von einer DTM in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
= die „leichten" Probleme (*feasible* problems)

NP = die von einer NTM in polynomieller Zeit lösbaren Probleme
In exponentieller Zeit lösbar (s. Simulation NTM durch DTM)

Zentrale Frage:

¿ P = NP ?

Ist wichtig

- weil viele *praktisch relevante* Such- und Optimierungsprobleme in NP liegen
- und alle schnell lösbar wären wenn eines schnell lösbar wäre.

Überblick:

1. Die Komplexitätsklassen P und NP
2. NP-Vollständigkeit
3. SAT: Ein NP-vollständiges Problem
4. Weitere NP-vollständige Probleme

2.1 Die Komplexitätsklasse P

Berechnungsmodelle:

DTM $=$ deterministische Mehrband-TM

NTM $=$ nichtdeterministische Mehrband-TM

Definition 2.1

time$_M(w)$ $:=$ Anzahl der Schritte bis die DTM $M[w]$ hält
$\in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine totale Funktion.
Die Klasse der in Zeit $f(n)$ entscheidbaren Sprachen:

$$\mathit{TIME}(f(n)) \;:=\; \{A \subseteq \Sigma^* \mid \exists\,\text{DTM } M.\ A = L(M) \wedge \forall w \in \Sigma^*.\ \mathit{time}_M(w) \le f(|w|)\}$$

Merke:

- n ist implizit die Länge der Eingabe
- Die DTM entscheidet die Sprache A in $\le f(n)$ Schritten

Wir betrachten nur Polynome mit Koeffizienten $a_k, \dots a_0 \in \mathbb{N}$:

$$p(n) = a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$$

Definition 2.2

$$\mathsf{P} := \bigcup_{p \ \text{Polynom}} \mathit{TIME}(p(n))$$

Damit gilt auch

$$\mathsf{P} = \bigcup_{k \geq 0} \mathit{TIME}(O(n^k))$$

wobei

$$\mathit{TIME}(O(f)) := \bigcup_{g \in O(f)} \mathit{TIME}(g)$$

Beispiel 2.3

- $\{ww^R \mid w \in \Sigma^*\} \in \mathit{TIME}(O(n^2)) \subseteq \mathsf{P}$
- $\{(G, w) \mid G$ ist CFG $\wedge\, w \in L(G)\} \in \mathsf{P}$
- $\{(G, w) \mid G$ ist Graph $\wedge\, w$ ist Pfad in $G\} \in \mathsf{P}$
- $\{bin(p) \mid p$ Primzahl$\} \in \mathsf{P}$

Beweis durch Angabe eines Algorithmus mit Komplexität $O(n^k)$.

Bemerkungen

- $O(n \log n) \subset O(n^2)$
- $n^{\log n}, 2^n \notin O(n^k)$ für alle k
- Beweis $A \notin \mathsf{P}$ meist schwierig

- Warum P und nicht (zB) $O(n^{17})$?
  Um robust bzgl Maschinenmodell zu sein:
  1-Band DTM braucht $O(t^2)$ Schritte
  um t Schritte einer k-Band DTM zu simulieren.
  Fast alle bekannten „vernünftigen“ Maschinenmodelle lassen sich von einer DTM in polynomieller Zeit simulieren.
  Offen: Quantencomputer

- Warum TM? Historisch.
  Ebenfalls möglich: (zB) WHILE.
  Aber zwei mögliche Kostenmodelle:

  Uniform x_i := x_j + n kostet 1 Zeiteinheit.
  Logarithmisch x_i := x_j + n kostet $\log x_j$ Zeiteinheiten.

2.2 Die Komplexitätsklasse NP

Intuitiv:

- NP die Klasse der Sprachen, die von einer NTM in polynomieller Zeit akzeptiert werden.
- Dh: Eine Sprache A liegt in NP gdw
  es ein Polynom $p(n)$ und eine NTM M gibt, so dass
  1. $L(M) = A$ und
  2. für alle $w \in A$ *kann* $M[w]$ in $\leq p(|w|)$ Schritten akzeptieren, dh einen Endzustand erreichen.

Definition 2.4

$$\textit{ntime}_M(w) := \begin{cases} \text{minimale Anzahl der Schritte} \\ \text{bis NTM } M[w] \text{ akzeptiert} & \text{falls } w \in L(M) \\ 0 & \text{falls } w \notin L(M) \end{cases}$$

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine totale Funktion.

$$\begin{aligned} \textit{NTIME}(f(n)) \quad &:= \quad \{A \subseteq \Sigma^* \mid \exists \text{NTM } M.\ A = L(M) \wedge \\ &\qquad\qquad \forall w \in \Sigma^*.\ \textit{ntime}_M(w) \leq f(|w|)\} \\ \text{NP} \quad &:= \quad \bigcup_{p \ \textit{Polynom}} \textit{NTIME}(p(n)) \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- P $\subseteq$ NP
- Seit etwa 1970 ist offen ob P $=$ NP.

Bemerkungen zur Definition von NP:
Akzeptierende NTM M

- braucht für $w \notin L(M)$ nicht zu halten.
- kann für $w \in L(M)$ auch beliebig lange Berechnunsgfolgen haben.

Äquivalente Definition NP' von NP:
Die NTM $M[w]$ *muss* nach maximal $p(|w|)$ Schritten halten.

NP' $\subseteq$ NP: Klar.

NP $\subseteq$ NP': Falls $A \in$ NP mit Polynom p und NTM M,
so kann man NTM M' konstruieren mit $L(M') = A$,
so dass $M'[w]$ immer innerhalb von polynomieller Zeit hält.

1. Eingabe w
2. Schreibe $p(|w|)$ auf ein getrenntes Band („timer“)
3. Simuliere $M[w]$, aber dekrementiere timer nach jedem Schritt.
4. Wird timer=0, ohne dass M gehalten hat, halte in einem nicht-Endzustand („timeout“)

Beispiel 2.5

- Ein Euler-Kreis ist ein geschlossener Pfad in einem (ungerichteten) Graphen, der jede Kante genau einmal enthält.
- Ein Graph hat einen Euler-Kreis gdw er zusammenhängend ist, und jeder Knoten geraden Grad hat.
- Beide Eigenschaften sind in polynomieller Zeit von einer DTM überprüfbar.
- $\implies \{G \mid G \text{ hat Euler-Kreis}\} \in \mathsf{P}$

Beispiel 2.6

- Ein Hamilton-Kreis ist ein geschlossener Pfad in einem (ungerichteten) Graphen, der jeden Knoten genau einmal enthält.
- HAMILTON $:= \{G \mid G$ hat Hamilton-Kreis$\} \in$ NP
  mit folgendem Algorithmus der Art „Rate und prüfe“:
  1. Rate eine Permutation der Knoten des Graphen.
  2. Prüfe, ob diese Permutation ein Hamilton-Kreis ist.

  Das Raten ist in polynomieller Zeit von einer NTM machbar.
  Das Prüfen ist in polynomieller Zeit von einer DTM machbar.

Vermutung: HAMILTON $\notin$ P, da man keinen substanziell besseren Algorithmus kennt, als alle Permutationen auszuprobieren.

Viele Probleme sind von der Art dass

- schwer ist, zu entscheiden, ob sie lösbar sind,
- leicht ist, zu entscheiden, ob eine Lösungsvorschlag eine Lösung ist.

Definition 2.7

Sei M eine DTM mit $L(M) \subseteq \{w\#c \mid w \in \Sigma^*, c \in \Delta^*\}$.

- Falls $w\#c \in L(M)$, so heißt c Zertifikat für w.
- M ist ein polynomiell beschränkter Verifikator für die Sprache $\{w \in \Sigma^* \mid \exists c \in \Delta^*.\ w\#c \in L(M)\}$ falls es ein Polynom p gibt, so dass $\mathit{time}_M(w\#c) \leq p(|w|)$.

NB:
In Zeit $p(n)$ kann M maximal die ersten $p(n)$ Zeichen von c lesen.
Daher genügt für w ein Zertifikat der Länge $\leq p(|w|)$.

Beispiel 2.8 (HAMILTON)

Zertifikat: Knotenpermutation. In polynomieller Zeit verifizierbar.

Beispiel 2.9 (RUCKSACK)

Gegeben: Zahlen $a_1, \dots a_n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{N}$.

Problem: Gibt es $R \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $\sum_{i \in R} a_i = c$?

$$\begin{aligned} \text{RUCKSACK} \quad := \quad & \{bin(a_1)\# \dots \#bin(a_n)\#bin(c) \mid \\ & \qquad \exists R \subseteq \{1, \dots, n\}.\ \sum_{i \in R} a_i = c\} \end{aligned}$$

RUCKSACK $\in$ NP:
Zertifikat: Indexmenge R. In polynomieller Zeit verifizierbar.

Merke: Der Nachweis $A \in$ NP ist meistens einfach.

Satz 2.10

$A \in$ NP gdw es gibt polynomiell beschränkten Verifikator für A.

Beweis:

„$\Rightarrow$“:

Sei $A \in$ NP. Dh es gibt NTM N, die A in Zeit $p(n)$ akzeptiert.
Ein Zertifikat für $w \in A$ ist die Folge der benutzten Transitionen $\delta(q, a) \ni (q', a', d)$ einer akzeptierenden Berechnunsgfolge von $N[w]$ mit $\leq p(n)$ Schritten.
Ein polynomiell beschränkter Verfikator für $L(N)$:

1. Eingabe $w\#c$
2. Simuliere $N[w]$, gesteuert durch die Transitionen in c.
3. Überprüfe dabei, ob die Transition in c jeweils zu N und zur augenblicklichen Konfiguration von N passt.
4. Akzeptiere, falls c in einen Endzustand führt.

Beweis (Forts.):

„$\Leftarrow$“:

Sei M ein polynomiell (durch p) beschränkter Verifikator für A.
Wir bauen eine polynomiell beschränkte NTM N mit $L(M) = A$:

1. Eingabe w.
2. Schreibe hinter w zuerst $\#$ und dann ein nichtdeterministisch gewähltes Wort $c \in \Delta^*$, $|c| = p(|w|)$:
   for $i := 1, \ldots, p(|w|)$ **do**
   schreibe ein Zeichen aus Δ und gehe nach rechts
3. Führe M aus (mit Eingabe $w\#c$).

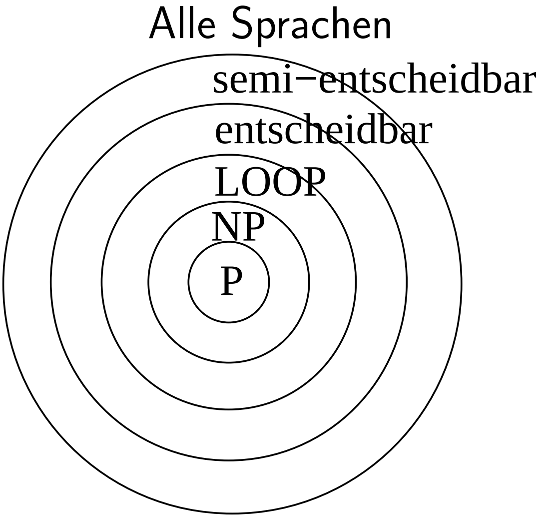
Nach Annahme gilt *time*$_M(w\#c) \leq p(|w|)$.
Damit braucht $N[w]$ $O(p(|w|))$ Schritte. $\square$

Fazit:

- **P** sind die Sprachen, bei denen $w \in L$ schnell entschieden werden kann.
- **NP** sind die Sprachen, bei denen ein Zertifkat für $w \in L$ schnell verifiziert/überprüft werden kann.

Intuition:
Es ist leichter, eine Lösung zu verifizieren als zu finden.

Aber:
Noch wurde von keiner Sprache bewiesen, dass sie in NP$\setminus$P liegt.



Nur die P-NP-Grenze ist offen.

Satz 2.11

*Ist $A \in$ TIME(f) und ist f LOOP-berechenbar,
dann ist A LOOP-entscheidbar, dh χ_A ist LOOP-berechenbar.*

Beweis:

Sei M eine DTM mit $L(M) = A$ und *time*$_M(w) \leq f(|w|)$.
$M \mapsto$ GOTO $\mapsto$ WHILE:

$$
\begin{array}{l}
pc \texttt{ := } 1\texttt{;} \\
\texttt{WHILE } pc \neq 0 \texttt{ DO} \\
\quad \texttt{IF } pc = 1 \texttt{ THEN } P_1 \texttt{ ELSE} \\
\quad \ldots \\
\quad \texttt{IF } pc = k \texttt{ THEN } P_k \texttt{ ELSE } pc := 0 \\
\texttt{END}
\end{array}
$$

wobei jeder Schleifendurchlauf einen Schritt von M simuliert.
Es kann maximal $f(|w|)$ viele Schleifendurchläufe geben.
Ersetze $\texttt{WHILE } pc \neq 0 \texttt{ DO}$ durch $i := f(|w|)\texttt{; LOOP } i \texttt{ DO}$.
Berechnung wie vorher, aber evtl mit zusätzlichen Durchläufen mit $pc = 0$. □

Da $+$ und $*$ LOOP-berechenbar sind, folgt:

Korollar 2.12

Alle Sprachen in P sind LOOP-entscheidbar.

Da sich jede polynomiell zeitbeschränkte NTM (Zeit $O(p(n))$) in eine exponentiell zeitbschränkte DTM (Zeit $O(c^{p(n)})$) umwandeln lässt und $c^{p(n)}$ LOOP-berechenbar ist, folgt:

Korollar 2.13

Alle Sprachen in NP sind LOOP-entscheidbar.

2.3 NP-Vollständigkeit

1. Polynomielle Reduzierbarkeit $\leq_p$
2. NP-vollständige Probleme = härteste Probleme in NP, alle anderen Probleme in NP darauf polynomiell reduzierbar
3. Satz: SAT ist NP-vollständig

Definition 2.14

Sei $A \subseteq \Sigma^*$ und $B \subseteq \Gamma^*$.
Dann heißt A polynomiell reduzierbar auf B, $A \leq_p B$,
gdw es eine totale und von einer DTM in polynomieller Zeit berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ gibt, so dass für alle $w \in \Sigma^*$

$$w \in A \iff f(w) \in B$$

Da $q(p(n))$ ein Polynom ist falls p und q Polynome sind:

Lemma 2.15

Die Relation $\leq_p$ ist transitiv.

Lemma 2.16

Die Klassen P und NP sind unter polynomieller Reduzierbarkeit nach unten abgeschlossen:

$$A \leq_p B \in \mathsf{P/NP} \implies A \in \mathsf{P/NP}$$

Beweis:

- Sei $A \leq_p B$ mittels f, die von DTM M_f berechnet wird. Polynom p begrenzt Rechenzeit von M_f.
- Sei $B \in$ P mittels DTM M. Polynom q begrenzt Rechenzeit von M.

Damit ist $M_f; M$ polynomiell zeitbeschränkt in $|w|$:

- $M_f[w]$ macht $\leq p(|w|)$ Schritte.
- Ausgabe $f(w)$ von M_f hat Länge $\leq |w| + p(|w|)$.
- M macht $\leq q(|f(w)|) \leq q(|w|+p(|w|))$ Schritte (q monoton)

Daher macht $(M_f; M)[w]$ maximal $p(|w|) + q(|w| + p(|w|))$ Schritte, ein Polynom in $|w|$.

Analog: $A \leq_p B \in \mathrm{NP} \implies A \in \mathrm{NP}$ $\square$

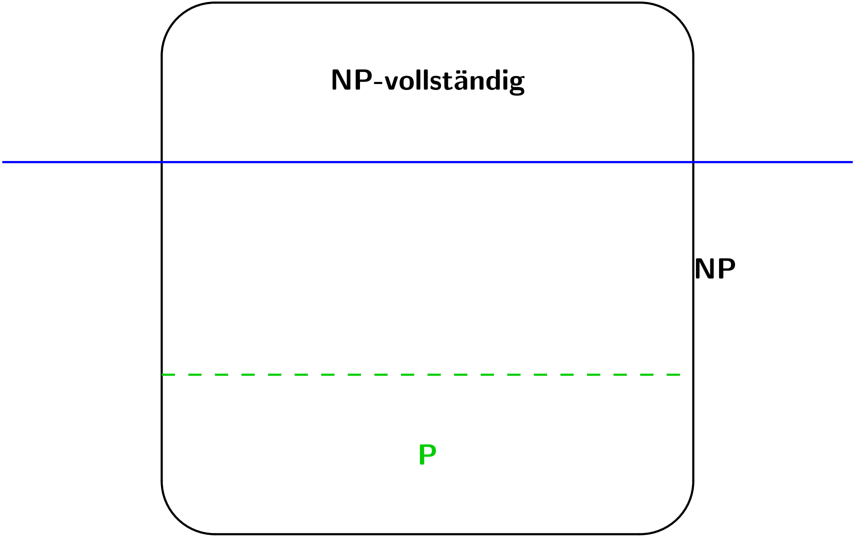
Ein Problem ist NP-hart,
wenn es mindestens so hart wie alles in NP ist:

Definition 2.17
Eine Sprache L heißt NP-hart gdw $A \leq_p L$ für alle $A \in$ NP.

Definition 2.18
Eine Sprache L heißt NP-vollständig gdw
L NP-hart ist und $L \in$ NP.

NP-vollständige Probleme sind die schwierigsten Probleme in NP:
alle Probleme in NP sind polynomiell auf sie reduzierbar.

NP-hart



Wie man $P \stackrel{?}{=} NP$ lösen kann:

Lemma 2.19

Es gilt P=NP gdw ein NP-vollständiges Problem in P liegt.

Beweis:

„$\Rightarrow$": Falls P=NP, so liegt jedes NP-vollständige Problem in P.

„$\Leftarrow$": Sei L ein NP-vollständiges Problem in P.
Dann gilt P $\supseteq$ NP:
Ist $A \in$ NP, so gilt $A \leq_p L$ (da L NP-hart)
und nach Lemma 2.16 $A \in$ P (da $L \in$ P). $\square$

Starke Vermutung:

- P $\neq$ NP
- dh kein NP-vollständiges Problem ist in P.

Aber gibt es überhaupt NP-vollständige Probleme?

Aussagenlogik

Syntax der Aussagenlogik:

$$\begin{array}{rrcl} \text{Formeln:} & F & \rightarrow & \neg F \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \mid X \\ \text{Variablen:} & X & \rightarrow & x \mid y \mid z \mid \ldots \end{array}$$

Bsp: $((\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z))$

Konvention: man darf äußerste Klammern weglassen
und $\wedge$ bindet stärker als $\vee$: $x \wedge y \vee z$ ist Abk. für $(x \wedge y) \vee z$

Semantik der Aussagenlogik:

- Eine Belegung ist eine Funktion von Variablen auf $\{0, 1\}$.
  Bsp: $\sigma = \{x \mapsto 0, y \mapsto 1, z \mapsto 0, \ldots\}$
- Belegungen werde mittels Wahrheitstabellen auf Formeln erweitert. Bsp: $\sigma((\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg z)) = 1$
- Eine Formel F ist erfüllbar gdw es eine Belegung σ gibt mit $\sigma(F) = 1$

SAT

Gegeben: Eine aussagenlogische Formel F.

Problem: Ist F erfüllbar?

Praktische Bedeutung von SAT:

Äquivalenztest von Schaltungen (und vieles mehr)

Fakt 2.20

Zwei Formeln F_1 und F_2 sind genau dann äquivalent ($F_1 \leftrightarrow F_2$), wenn $(F_1 \wedge \neg F_2) \vee (\neg F_1 \wedge F_2)$ nicht erfüllbar ist.

Lemma 2.21

SAT $\in$ NP

Beweis:

Belegungen sind Zertifikate, die in polynomieller Zeit geprüft werden können: Es gibt eine DTM, die bei Eingabe einer Formel F und einer Belegung σ für die Variablen in F, in polynomieller Zeit $\sigma(F)$ berechnet. □

Satz 2.22 (Cook 1971)

SAT ist NP-vollständig.

Beweis:

Da SAT $\in$ NP, bleibt noch zu zeigen, SAT ist NP-hart.
Sei $A \in$ NP. Wir zeigen $A \leq_p$ SAT.
Da $A \in$ NP gibt es NTM M mit $A = L(M)$ und
Polynom p mit *ntime*$_M(w) \leq p(|w|)$.
Reduktion bildet $w = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ auf eine Formel F ab.
In polynomieller Zeit. So dass $w \in L(M) \Leftrightarrow F \in SAT$.

Die Variablen beschreiben das *mögliche* Verhalten von $M[w]$:

zust$_{t,q}$	$t = 0, \dots, p(n)$ $q \in Q$	*zust*$_{t,q} = 1 \Leftrightarrow$ Zustand nach t Schritten ist q
pos$_{t,i}$	$t = 0, \dots, p(n)$ $i = -p(n), \dots p(n)$	*pos*$_{t,i} = 1 \Leftrightarrow$ Kopfposition nach t Schritten ist i
band$_{t,i,a}$	$t = 0, \dots, p(n)$ $i = -p(n), \dots, p(n)$ $a \in \Gamma$	*band*$_{t,i,a} = 1 \Leftrightarrow$ Bandinhalt nach t Schritten auf Bandposition i ist Zeichen a

Beweis (Forts.):

Sei $Q = \{q_1, \ldots, q_k\}$ und $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_l\}$.

$$
\begin{aligned}
F &:= R \wedge A \wedge T_1 \wedge T_2 \wedge E \\
R &:= \bigwedge_t [G(\mathit{zust}_{t,q_1}, \ldots, \mathit{zust}_{t,q_k}) \wedge G(\mathit{pos}_{t,-p(n)}, \ldots, \mathit{pos}_{t,p(n)}) \wedge \\
&\qquad \bigwedge_i G(\mathit{band}_{t,i,a_1}, \ldots, \mathit{band}_{t,i,a_l})] \\
A &:= \mathit{zust}_{0,q_1} \wedge \mathit{pos}_{0,1} \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} \mathit{band}_{0,j,x_j} \wedge \\
&\qquad \bigwedge_{j=-p(n)}^{0} \mathit{band}_{0,j,\Box} \wedge \bigwedge_{j=n+1}^{p(n)} \mathit{band}_{0,j,\Box}
\end{aligned}
$$

Beweis (Forts.):

$$
\begin{aligned}
T_1 &:= \bigwedge_{t,q,i,a} [\mathit{zust}_{t,q} \wedge \mathit{pos}_{t,i} \wedge \mathit{band}_{t,i,a} \\
&\qquad \rightarrow \bigvee_{(q',a',y)\in\delta(q,a)} (\mathit{zust}_{t+1,q'} \wedge \mathit{pos}_{t+1,i+y} \wedge \mathit{band}_{t+1,i,a'})] \\
T_2 &:= \bigwedge_{t,i,a} ((\neg \mathit{pos}_{t,i} \wedge \mathit{band}_{t,i,a}) \rightarrow \mathit{band}_{t+1,i,a}) \\
E &:= \bigvee_{t} \bigvee_{q\in F} \mathit{zust}_{t,q}
\end{aligned}
$$

$$
G(v_1, \ldots, v_r) := (\bigvee_{i=1}^{r} v_i) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{r-1} \bigwedge_{j=i+1}^{r} \neg(v_i \wedge v_j) \right)
$$

$\square$

Von der Lösbarkeit zur Lösung

Die Berechnung einer erfüllenden Belegung kann auf SAT reduziert werden:

Sei F eine Formel mit den Variablen $x_1, \ldots, x_k$:

if $F \notin$ SAT **then** output("nicht lösbar")
else
  for $i := 1$ **to** k **do**
    if $F[x_i := 0] \in$ SAT **then** $b := 0$ **else** $b := 1$
    output(x_i "=" b)
    $F := F[x_i := b]$

wobei $F[x := b] \; = \; F$ mit x ersetzt durch b.

Entscheidung von SAT in Zeit $O(f(n))$
$\Longrightarrow$ Berechnung einer erf. Bel. in Zeit $O(n \cdot (f(n) + n))$
(falls es eine gibt.)

$f(n)$ polynomiell $\Longrightarrow$ $n \cdot (f(n) + n)$ polynomiell
$f(n)$ exponentiell $\Longrightarrow$ $n \cdot (f(n) + n)$ exponentiell

Bemerkungen:

- Die Reduzierung der Lösungsberechnung auf SAT ist eine rein theoretische Konstruktion.
- Sie zeigt, dass man sich auf SAT beschränken kann, wenn man nur an polynomiell/exponentiell interessiert ist.
- Alle bekannten Entscheidungsverfahren für SAT berechnen auch eine Lösung.

Von NP-hart zu „NP-leicht“

- Bis vor 10 Jahren:

  NP-vollständig = Todesurteil

- In den letzten 10 Jahren:
  Spektakuläre Fortschritte bei *Implementierung* von
  SAT-Lösern (*SAT-solver*): `http://satcompetition.org`
  Stand der Kunst: Erfüllbar: bis 10^5 Variablen
  Unerfüllbar: bis 10^3 Variablen

- Jetzt:

  NP-vollständig = Hoffnung durch SAT

- Paradigma:

  SAT (Logik!) als universelle Sprache
  zur Kodierung kombinatorischer Probleme

  Reduktion auf SAT manchmal schneller als problemspezifische Löser! Und fast immer einfacher.

Beispiel: Reduktion von 3-Färbbarkeit (3COL) auf SAT.

3COL

Gegeben: Ein ungerichteter Graph

Problem: Gibt es eine Färbung der Knoten, so dass keine benachbarten Knoten gleich gefärbt sind?

Lineare Reduktion von Graph $G = (V, E)$ auf SAT:

- Variablen $= V \times \{1, 2, 3\}$. Notatation: x_{vi}
- Interpretation: $x_{vi} = 1$ gdw Knoten v hat Farbe i

Instanz von SAT:

$$\bigwedge_{v \in V} G(x_{v1}, x_{v2}, x_{v3}) \;\wedge \bigwedge_{(u,v) \in E} \neg(x_{u1} \wedge x_{v1} \vee x_{u2} \wedge x_{v2} \vee x_{u3} \wedge x_{v3})$$

Bemerkungen

- Zeigt 3COL $\leq_p$ SAT und damit 3COL $\in$ NP.
- Zeigt nicht, dass 3COL NP-vollständig ist.

Ähnlich direkt polynomiell auf SAT reduzierbar:

- HAMILTON
- SUDOKU
- ...

Eine Anwendung von k-Färbbarkeit: **Registerverteilung**

> *Kann man in einem Programmstück n Variablen so auf k Register verteilen, dass jede Variable so lange in einem Register bleibt, wie sie lebendig ist?*

Variable ist an einem Punkt lebendig
gdw sie später noch gelesen wird, ohne vorher überschrieben worden zu sein.

Reduktion auf k-Färbbarkeit:

Variable	$=$	Knoten
u und v verbunden	$=$	$u \neq v$ und es gibt einen Programmpunkt, an dem u und v lebendig sind
Farbe	$=$	Register
k-Färbung	$=$	Zuordnung eines Registers zu jeder Variablen

Sowohl k-Färbbarkeit als auch Registerverteilung ist für $k \geq 3$ NP-vollständig.

Mehr Information: Vorlesung *Programmoptimierung*

Weitere Anwendungen von SAT:

Bounded Model Checking

Hardware Entscheide, ob eine Schaltung mit Zustand für alle Eingaben innerhalb von 10 Zyklen ein bestimmtes Verhalten (nicht) hat.

Software Entscheide, ob ein Programm für alle Eingaben innerhalb von 10 Schritten ein bestimmtes Verhalten (nicht) hat.
Variablen müssen auf sehr kleine Wertebereiche eingeschränkt werden!

2.4 Weitere NP-vollständige Probleme

Wie zeigt man, dass ein (weiteres) Problem B NP-vollständig ist?

- Zeige $B \in$ NP (meist trivial)
- Zeige $A \leq_p B$ für ein NP-vollständiges Problem A.

Lemma 2.23

Ist A NP-vollständig, so ist $B \in$ NP ebenfalls NP-vollständig, falls $A \leq_p B$.

Beweis:

Folgt direkt aus der Transitivität von $\leq_p$:
B ist NP-hart, denn für $C \in$ NP gilt $C \leq_p A \leq_p B$. $\square$

Warum will man wissen, dass ein Problem B NP-vollständig ist?
Um sicher zu sein, dass

- ein polynomieller Algorithmus für B ein Durchbruch wäre
- und daher wahrscheinlich nicht existiert.

Praktische Instanzen von B könnten trotzdem (zB mit SAT) „effizient“ lösbar sein.

Definition 2.24

- Eine Formel ist in Konjunktiver Normalform (KNF) gdw sie eine Konjunktion von Klauseln ist: $K_1 \wedge \cdots \wedge K_n$
- Eine Klausel ist eine Disjunktion von Literalen: $L_1 \vee \cdots \vee L_m$
- Ein Literal ist eine (evtl. negierte) Variable.
- Eine Formel ist in 3KNF gdw jede Klausel ≤ 3 Literale enthält.

Dh eine KNF ist ein Konjunktion von Disjunktionen von (evtl negierten) Variablen.
Bsp: $(x_9 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_7 \vee x_1 \vee x_6)$

3KNF-SAT

Gegeben: Ein Formel in 3KNF

Problem: Ist die Formel erfüllbar?

Offensichtlich gilt 3KNF-SAT $\in$ NP.
Aber vielleicht ist 3KNF-SAT einfacher als SAT?

Satz 2.25

3KNF-SAT ist NP-vollständig.

Beweis:

Wir zeigen SAT $\leq_p$ 3KNF-SAT mit einer polynomiellen Reduktion $F \mapsto F'$ so dass F' in 3KNF ist und

$$F \text{ ist erfüllbar } \Leftrightarrow F' \text{ ist erfüllbar}$$

NB F und F' sind erfüllbarkeitsäquivalent, aber nicht notwendigerweise auch äquivalent.

1. Transformiere F in Negations-Normalform (NNF) durch fortgesetze Anwendung der de Morganschen Gesetze

$$\begin{aligned} \neg(A \wedge B) &= \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) &= \neg A \wedge \neg B \\ \neg\neg A &= A \end{aligned}$$

von links nach rechts. F_1 ist Resultat.

Beweis (Forts.):

Für F_1 gilt: $\neg$ nur noch direkt vor Variablen.

2. Betrachte F_1 als Baum, wobei die Literale Blätter sind.
Ordne jedem inneren Knoten eine neue Variable $\in \{y_0, y_1, \ldots\}$ zu.
Ordne dabei der Wurzel von F_1 die Variable y_0 zu.

3. Betrachte die y_i als Abkürzung für die Teilbäume, an deren Wurzeln sie stehen

$$y_i = \begin{array}{ccc} & \circ_i & \\ / & & \backslash \\ l_i & & r_i \end{array}$$

wobei $\circ_i \in \{\wedge, \vee\}$ und l_i, r_i ein Literal oder eine Variable y_j ist.
Beschreibe F_1 Knoten für Knoten:

$$y_0 \wedge (y_0 \leftrightarrow (l_0 \circ_0 r_0)) \wedge (y_1 \leftrightarrow (l_1 \circ_1 r_1)) \ldots =: F_2$$

Beweis (Forts.):

F_1 erf. $\Longrightarrow$ F_2 erf.: y_i bekommt Wert seines Teilbaums.
F_2 erf. $\Longrightarrow$ F_1 erf.: klar

4. Transformiere jede Äquivalenz in 3KNF:

$$\begin{array}{lcl}(a \leftrightarrow (b \vee c)) & \mapsto & (a \vee \neg b) \wedge (a \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \\ (a \leftrightarrow (b \wedge c)) & \mapsto & (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)\end{array}$$

Ergebnis ist F'.

Jeder Schritt ist in polynomieller Zeit in $|F|$ berechenbar.
Bei Transformation in NNF nimmt mit jedem Schritt

Summe der $|G|$ für alle Teilformeln $\neg G$ von F

ab. Daher erreicht man die NNF in $\leq |F|^2$ Schritten. $\square$

Da jede Formel in 3KNF auch in KNF ist:

Korollar 2.26

KNF-SAT ist NP-vollständig.

Kann man wie folgt die NP-Vollständigkeit von KNF-SAT zeigen?

> Man zeigt SAT $\leq_p$ KNF-SAT
> indem man jede Formel in KNF transformiert.

Satz 2.27

2KNF-SAT $\in$ *P*

Ohne Beweis

MENGENÜBERDECKUNG (MÜ)

Gegeben: Teilmengen $T_1, \ldots, T_n \subseteq M$ einer endlichen Menge M und eine Zahl $k \leq n$.

Problem: Gibt es $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $M = T_{i_1} \cup \cdots \cup T_{i_k}$?

Beispiel 2.28

$$
\begin{array}{lcllcl}
T_1 & = & \{1,2\} & T_2 & = & \{1,3\} \\
T_3 & = & \{3,4\} & T_4 & = & \{3,5\} \\
M & = & \{1,2,3,4,5\} & k & = & 3
\end{array}
$$

Lösung:

Anwendung: Zulieferer

M Menge der Teile, die eine Firma einkaufen muss

T_i Menge der Teile, die Zulieferer i anbietet

Kann die Firma ihre Bedürfnisse mit k Zulieferern abdecken?

Fakt 2.29

MÜ $\in$ NP.

Satz 2.30
MÜ ist NP-vollständig.

Beweis:
Wir zeigen KNF-SAT $\leq_p$ MÜ.
Sei $F = K_1 \wedge \cdots \wedge K_m$ in KNF, mit Variablen $x_1, \ldots, x_k$.

$$\begin{array}{lcl} M & := & \{1, \ldots, m, m+1, \ldots, m+k\} \\ T_i & := & \{j \mid x_i \text{ kommt in } K_j \text{ positiv vor}\} \cup \{m+i\} \\ T_i' & := & \{j \mid x_i \text{ kommt in } K_j \text{ negativ vor}\} \cup \{m+i\} \end{array}$$

F ist erfülbar gdw
M wird durch k der Teilmengen $T_1, \ldots, T_k, T_1', \ldots, T_k'$ überdeckt

$\square$

Das **Minimierungsproblem**

Gegeben: Teilmengen $T_1, \ldots, T_n \subseteq M$ einer endlichen Menge M

Problem: Finde das kleinste k, so dass M von k der Teilmengen überdeckt wird.

kann auf das Entscheidungsproblem reduziert werden:

> Finde kleinstes k durch binäre Suche im Intervall $[1, n]$ mit $O(\log n)$ Aufrufen von MÜ.

Kann man MÜ in Zeit $O(f(n))$ entscheiden,
dann kann man das kleinste k in Zeit $O(f(n) \cdot \log n)$ berechnen.

$$\begin{aligned} f(n) \text{ polynomiell} &\implies f(n) \cdot \log n \text{ polynomiell} \\ f(n) \text{ exponentiell} &\implies f(n) \cdot \log n \text{ exponentiell} \end{aligned}$$

Die Berechnung einer **Lösung**

Gegeben: Teilmengen $\vec{T} := T_1, \ldots, T_n \subseteq M$ einer endlichen Menge M, und eine Zahl $k \leq n$.

Problem: Finde eine Überdeckung von M durch k der Teilmengen.

kann auf das Entscheidungsproblem reduziert werden:

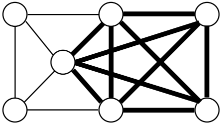
if $(\vec{T}, M, k) \notin$ MÜ **then** output("nicht lösbar")
else
    $\ddot{U} := \emptyset$
    for $i := 1$ **to** n **do**
        if $(\vec{T} - T_i, M, k) \in$ MÜ
        then $\vec{T} := \vec{T} - T_i$
        else $\ddot{U} := \ddot{U} \cup \{T_i\}$

CLIQUE

Gegeben: Ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Problem: Besitzt G eine „Clique" der Größe mindestens k?
Dh eine Teilmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| \geq k$
und alle $u, v \in V'$ mit $u \neq v$ sind benachbart.

Beispiel mit 5-Clique:



Anwendung von Clique-Berechnung:

Knoten	$=$	Prozess
Kante	$=$	Zwei Prozesse sind parallel ausführbar

$\Longrightarrow$ Clique ist Gruppe von parallelisierbaren Prozessen

Fakt 2.31

CLIQUE $\in$ *NP*

Satz 2.32

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis: 3KNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE:

Eine Formel F in 3KNF-SAT (oE: *genau* 3 Literale/Klausel)

$$F = (z_{11} \vee z_{12} \vee z_{13}) \wedge \ldots \wedge (z_{k1} \vee z_{k2} \vee z_{k3})$$

wird auf einen Graphen abgebildet:

$$\begin{array}{rcl} V & = & \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(k,1),(k,2),(k,3)\} \\ E & = & \{\{(i,j),(p,q)\} \mid i \neq p \text{ und } z_{ij} \neq \neg z_{pq}\} \end{array}$$

F ist erfüllbar durch eine Belegung σ $\iff$
Es gibt in jeder Klausel i ein Literal z_{ij_i} mit $\sigma(z_{ij_i}) = 1$
$\iff$
Die Literale $z_{1j_1}, \ldots, z_{kj_k}$ sind paarweise nicht komplementär
$\iff$
Die Knoten $(1, j_1), \ldots, (k, j_k)$ sind paarweise benachbart
$\iff$ G hat eine Clique der Größe k. □

RUCKSACK

Gegeben: Zahlen $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$.

Problem: Gibt es $R \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in R} a_i = b$?

Satz 2.33

RUCKSACK ist NP-vollständig.

Beweis:

3KNF-SAT $\leq_p$ RUCKSACK :

Sei $F = (z_{11} \vee z_{12} \vee z_{13}) \wedge \cdots \wedge (z_{m1} \vee z_{m2} \vee z_{m3})$, wobei

$$z_{ij} \in \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \neg x_2, \ldots, \neg x_n\}$$

D.h. $m =$ Anzahl der Klauseln und n Anzahl der vorkommenden Variablen.

Wir geben jetzt Zahlen $\vec{a} = a_1, \ldots, a_k$ und b an. b ist (etwa im Dezimalsystem)

$$b = \underbrace{44\ldots444}_{m}\underbrace{11\ldots11}_{n}$$

□

PARTITION

Gegeben: Zahlen $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{N}$.

Problem: Gibt es $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$?

Satz 2.34

PARTITION ist NP-vollständig.

Beweis: RUCKSACK $\leq_p$ PARTITION

Beispiel: $\vec{a} = 12, 7, 4, 9, 7, 3, 15$ und $b = 38$.

Lösung: Die Zahlen $7, 9, 7, 15$, dh $R = \{2, 4, 5, 7\}$

RUCKSACK $\to$ PARTITION:

$M := \sum_{i=1}^{n} a_i = 57, \quad M - b + 1 = 20, \quad b + 1 = 39$

Das resultierende PARTITONS-Problem: $12, 7, 4, 9, 7, 3, 15, \; 20, 39$

Lösung: $\{7, 9, 7, 15, 20\}$ und $\{12, 4, 3, 39\}$, dh $I = \{2, 4, 5, 7, 8\}$.

Reduktion im Allgemeinen:

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, b \;\mapsto\; a_1, a_2, \ldots, a_k, M - b + 1, b + 1 \qquad \Box$$

BIN PACKING

Gegeben: Eine „Behältergröße“ $b \in \mathbb{N}$, die Anzahl der Behälter $k \in \mathbb{N}$ und „Objekte“ $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Problem: Können die Objekte so auf die k Behälter verteilt werden, dass kein Behälter überläuft?

Satz 2.35

BIN PACKING ist NP-vollständig.

Beweis: PARTITION $\leq_p$ BIN PACKING

$$(a_1, \ldots, a_n) \;\mapsto\; (b, k, 2a_1, \ldots, 2a_n)$$

wobei $b := \sum_{i=1}^{k} a_i$ und $k := 2$. □

HAMILTON

Gegeben: Ungerichteter Graph G

Problem: Enthält G einen Hamilton-Kreis, dh einen geschlossenen Pfad, der jeden Knoten genau einmal enthält?

Satz 2.36

HAMILTON ist NP-vollständig.

TRAVELLING SALESMAN (TSP)

Gegeben: Eine $n \times n$ Matrix $M_{ij} \in \mathbb{N}$ von „Entfernungen“ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$

Problem: Gibt es eine „Rundreise“ (Hamilton-Kreis) der Länge $\leq k$?

Satz 2.37

TSP ist NP-vollständig.

Beweis: HAMILTON $\leq_p$ TSP

$$(\{1, \ldots, n\}, E) \;\mapsto\; (M, n)$$

wobei

$$M_{ij} \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i, j\} \in E \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\square$

FÄRBBARKEIT (COL)

Gegeben: Ein ungerichteter Graph (V, E) und eine Zahl k.

Problem: Gibt es eine Färbung der Knoten V mit k Farben, so dass keine zwei benachbarten Knoten die gleiche Farbe haben?

Satz 2.38

FÄRBBARKEIT ist NP-vollständig für $k \geq 3$.

Beweis:

3KNF-SAT $\leq_p$ 3FÄRBBARKEIT $\square$

Satz 2.39

2FÄRBBARKEIT $\in$ *P*

Die NP-Bibel, der NP-Klassiker:

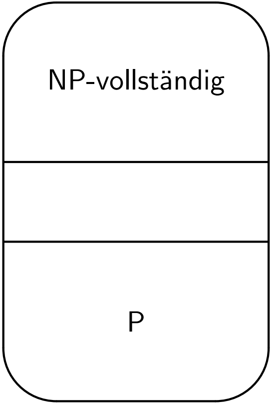
Michael Garey and David Johnson.
Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. 1979.

> *Despite the 23 years that have passed since its publication, I consider Garey and Johnson the single most important book on my office bookshelf.*

Lance Fortnow, 2002.

Man weiß nicht ob $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$. Aber man weiß (Ladner 1975)

$$\mathsf{P} \neq \mathsf{NP} \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{NP} =$$



Kurt Gödel.
Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik, 1931.

Kurt Gödel
1906 (Brünn) –
1978 (Princeton)

2.5 Die Unvollständigkeit der Arithmetik

Syntax der Arithmetik:

Variablen:	V	$x\ y\ z\ \ldots$
Zahlen:	N	$0\ 1\ 2\ \ldots$
Terme:	T	$V\ \ N\ \ (T+T)\ (T*T)$
Formeln:	F	$(T=T)\ \neg F\ (F\wedge F)\ (F\vee F)$
		$\exists V.\,F$

Wir betrachten $\forall x.\,F$ als Abk. für $\neg\exists\ x.\,\neg F$.

Definition 2.40

Ein Vorkommen einer Variablen x in einer Formel F ist gebunden gdw das Vorkommen in einer Teilformel der Form $\exists x.\,F'$ oder $\forall x.\,F'$ in der Teilformel F' liegt.
Ein Vorkommen ist frei gdw es nicht gebunden ist.

Notation: $F(x_1, \ldots, x_k)$ bezeichnet eine Formel F, in der höchstens $x_1, \ldots, x_k$ frei vorkommen.

Sind $n_1, \ldots, n_k$ $\mathbb{N}$ so ist $F(n_1, \ldots, n_k)$ das Ergebnis der Substitution von $n_1, \ldots, n_k$ für die freien Vorkommen von $x_1, \ldots, x_k$.

Beispiel 2.41

$$\begin{array}{rcl} F(x, y) & = & (x = y \ \wedge \ \exists x.\, x = y) \\ F(5, 7) & = & (5 = 7 \ \wedge \ \exists x.\, x = 7) \end{array}$$

Ein Satz ist eine Formel ohne freie Variablen.

Beispiel 2.42

$$\exists x.\, \exists y.\, x = y \qquad\qquad \exists y.\, \exists x.\, x = y$$

Mit S bezeichnen wir die Menge der arithmetischen Sätze.

Die Menge der wahren Sätze der Arithmetik nennen wir W:

Definition 2.43

$(t_1 = t_2)\ W$	gdw	t_1 und t_2 den selben Wert haben.
$\neg F\ W$	gdw	$F\ W$
$(F \wedge G)\ W$	gdw	$F\ W$ und $G\ W$
$(F \vee G)\ W$	gdw	$F\ W$ oder $G\ W$
$\exists x.\, F(x)$	gdw	es $n\ \mathbb{N}$ gibt, so dass $F(n)\ W$

Fakt 2.44

Für jeden Satz F gilt entweder $F\ W$ oder $\neg F\ W$

NB Ob eine Formel mit freien Variablen wahr ist, kann vom Wert der freien Variablen abhängen:

$$\exists x.\, x + x = y$$

Daher haben wir Wahrheit nur für Sätze definiert.

Definition 2.45

Eine partielle Funktion $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ ist arithmetisch repräsentierbar gdw es eine Formel $F(x_1, \ldots, x_k, y)$ gibt, so dass für alle $n_1, \ldots, n_k, m\ \mathbb{N}$ gilt:

$$f(n_1, \ldots, n_k) = m \quad \text{gdw} \quad F(n_1, \ldots, n_k, m)\ W$$

Satz 2.46

Jede WHILE-berechenbare Funktion ist arithmetisch repräsentierbar.

Satz 2.47
W *ist nicht entscheidbar.*

Korollar 2.48
W *ist nicht semi-entscheidbar.*

Wir kodieren Beweise als Zahlen.

Definition 2.49

Ein Beweissystem für die Arithmetik ist ein entscheidbares Prädikat

$$Bew : \mathbb{N} \times S \ \rightarrow \ \{0, 1\}$$

wobei wir $Bew(b, F)$ lesen als „b ist Beweis für Formel F“.
Ein Beweissystem Bew ist korrekt gdw

$$Bew(b, F) \implies F \ W.$$

Ein Beweissystem Bew ist vollständig gdw

$$F \ W \implies \text{ es gibt } b \text{ mit } Bew(b, F).$$

Satz 2.50 (Gödel)

Es gibt kein korrektes und vollständiges Beweissystem für die Arithmetik.

Beweis:

Denn mit jedem korrekten und vollständigen Beweissystem kann man $\chi'_W(F)$ programmieren:

$b := 0$
while $Bew(b, F) = 0$ **do** $b := b + 1$
output(1)

$\square$

2.6 Die Entscheidbarkeit der Presburger Arithmetik

Syntax der Presburger Arithmetik:

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{Variablen:} & V & \to & x \mid y \mid z \mid \ldots \\
\text{Zahlen:} & N & \to & 0 \mid 1 \mid 2 \mid \ldots \\
\text{Terme:} & T & \to & V \mid N \mid T + T \\
\text{Formeln:} & F & \to & (T = T) \mid \neg F \mid (F \wedge F) \mid (F \vee F) \\
 & & \mid & \exists V.\, F
\end{array}
$$

Wir betrachten $\forall x.\, F$ als Abk. für $\neg\exists x.\, \neg F$.

Satz 2.51

Für Sätze der Presburger Arithmetik ist entscheidbar, ob sie wahr sind.

Mojzesz Presburger.

Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt. 1929.

Mojzesz Presburger 1904 – 1943

YAD VASHEM

The Holocaust Martyrs' and Heroes' Remembrance Authority

Hall of Names - P.O.B. 3477, Jerusalem 91034 www.yadvashem.org

יד ושם

רשות הזיכרון לשואה ולגבורה

היכל השמות - ת.ד. 3477, ירושלים 91034

Page of Testimony דף עד

דף עד לרישום והנצחה של הנספים בשואה; נא למלא דף עבור כל נספה בנפרד, בכתב ברור ובאותיות דפוס.

Page of Testimony for commemoration of the Jews who perished during the Shoah; please submit a separate form for each victim, in block capitals

חוק זיכרון השואה והגבורה - תשי"ג 1953 קובע בסעיף מס' 2 כי תפקידו של יד ושם הוא לאסוף אל המולדת את זכרם של כל אלה מבני העם היהודי שנפלו ומסרו את נפשם, נלחמו ומרדו באויב הנאצי ובעוזריו ולהציב שם וזכר להם, לקהילות, לארגונים ולמוסדות שהוחרבו בגלל השתייכותם לעם היהודי.

The Martyrs' and Heroes' Remembrance Law 5713-1953 determins in section 2 that: "The task of Yad Vashem is to gather into the homeland material regarding all those members of the Jewish people who laid down their lives, who fought and rebelled against the nazi enemy and his collaborators, and to perpetuate their **names** and those of the communities, organizations and institutions which were destroyed because they were Jewish".

Maiden name: שם משפחה לפני הנישואין:

Victim's family name: שם משפחה של הנספה: PRESBURGER

Previous/other family name: שם משפחה קודם/אחר:

First name (also nickname): שם פרטי (גם שם חיבה/כינוי): MOJZESZ O MIETEK ?

Approx. age at death: גיל משוער בעת המוות: 43

Date of birth: תאריך לידה: 1904

Gender: מין: M / F ז / נ

Title: תואר: philosopher

Nationality: נתינות: POLISH

Country: ארץ: POLAND

Region: מחוז: ?

Place of birth: מקום לידה: ?

Victim's father: אב הנספה: Family name: שם משפחה: First name: שם פרטי:

Victim's mother: אם הנספה: Maiden name: שם לפני הנישואין: First name: שם פרטי:

Presburger Arithmetik $=$ normale Arithmetik
ohne Multiplikation

Arithmetik : hochgradig unentscheidbar :-(
sogar sogar unvollständig :-((

$\Longrightarrow$ Hilberts 10tes Problem
$\Longrightarrow$ Gödels Theorem

Vereinfachte Presburger Formeln:

$$\begin{array}{lcl} \phi & ::= & x + y = z \quad | \quad x = n \quad | \\ & & \phi_1 \wedge \phi_2 \quad | \quad \neg\phi \quad | \\ & & \exists\, x.\ \phi \end{array}$$

Bemerkungen

- Durch sukzessive Addition kann man Multiplikation mit Konstanten simulieren.
(Wie?)

- Das Rucksackproblem lässt sich in PA ausdrücken.
(Wie?)

Allgemeineres Ziel: **PSAT**

Finde Werte in $\mathbb{N}$ für die freien Variablen , so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken. (Wie?)

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Allgemeineres Ziel: **PSAT**

Finde Werte in $\mathbb{N}$ für die freien Variablen , so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken. (Wie?)

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Allgemeineres Ziel: **PSAT**

Finde Werte in $\mathbb{N}$ für die freien Variablen , so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken. (Wie?)

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Allgemeineres Ziel: **PSAT**

Finde Werte in $\mathbb{N}$ für die freien Variablen , so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken. (Wie?)

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Allgemeineres Ziel: **PSAT**

Finde Werte in $\mathbb{N}$ für die freien Variablen , so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken. (Wie?)

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Allgemeineres Ziel: **PSAT**

Finde Werte in $\mathbb{N}$ für die freien Variablen , so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken. (Wie?)

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Allgemeineres Ziel: **PSAT**

Finde Werte in $\mathbb{N}$ für die freien Variablen , so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken.
(Wie?)

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Allgemeineres Ziel: **PSAT**

Finde Werte in $\mathbb{N}$ für die freien Variablen , so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken. (Wie?)

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Allgemeineres Ziel: **PSAT**

Finde Werte in $\mathbb{N}$ für die freien Variablen , so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken. (Wie?)

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Allgemeineres Ziel: **PSAT**

Finde Werte in $\mathbb{N}$ für die freien Variablen , so dass ϕ gilt ...

Bemerkung:

Ganzzahlige Optimierung lässt sich als PSAT-Problem ausdrücken. (Wie?)

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte ...

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Beobachtung:

Die Menge der erfüllenden Variablenbelegungen ist regulär !!

$$\begin{array}{lcll} \phi_1 \wedge \phi_2 & \Longrightarrow & \mathcal{L}(\phi_1) \cap \mathcal{L}(\phi_2) & \text{(Durchschnitt)} \\ \neg\phi & \Longrightarrow & \overline{\mathcal{L}(\phi)} & \text{(Komplement)} \\ \exists\, x : \quad \phi & \Longrightarrow & \pi_x(\mathcal{L}(\phi)) & \text{(Projektion)} \end{array}$$

Achtung:

- Ein akzeptiertes Tupel kann immer durch führende Nullen verlängert werden !
- bleibt unter Vereinigung, Durchschnitt und Komplement erhalten !!
- Wie sieht das mit der Projektion aus ?

Weg-Projizierung der x-Komponente:

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

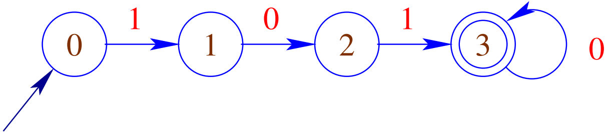
Weg-Projizierung der x-Komponente:

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0

- Nun werden möglicherweise Tupel von Zahlen erst nach Anhängen von geeignet vielen führenden Nullen akzeptiert !
- Der Automat muss so komplettiert werden, dass q bereits akzeptierend ist, wenn von q aus mit Nullen ein akzeptierender Zustand erreicht werden kann.

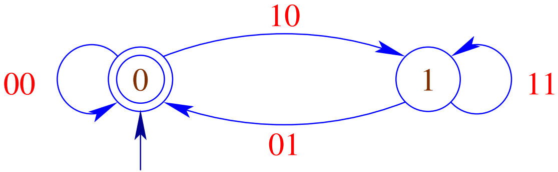
Automaten für Basis-Prädikate:

$$x = 5$$



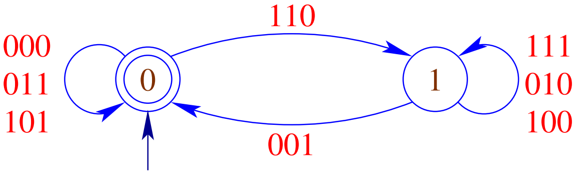
Automaten für Basis-Prädikate:

$x+x = y$



Automaten für Basis-Prädikate:

$x+y = z$



Ergebnisse:

Ferrante, Rackoff,1973 : $\mathrm{PSAT} \leq \mathrm{DSPACE}(2^{2^{c \cdot n}})$

Fischer, Rabin,1974 : $\mathrm{PSAT} \geq \mathrm{NTIME}(2^{2^{c \cdot n}})$