Technische Universität München
Institut für Informatik
PD Dr. Markus Holzer
Dipl.-Inf. Michael Tautschnig

WS 2007/2008
Übungsblatt 14
Mittwoch, 6. Februar 2007

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Lösungshinweise

Aufgabe 1 *Muller-Automaten*

(a) Sei A ein Büchi-Automat mit Endzustandsmenge F. Ein Ablauf π wird genau dann akzeptiert, wenn $Inf(\pi) \cap F \neq \emptyset$ gilt. Für einen Muller-Automat B, der die gleiche Sprache akzeptiert, muss daher $\mathcal{F} = \{F' \subseteq Q \mid F' \cap F \neq \emptyset\}$ gelten. Alle anderen Komponenten von A können einfach übernommen werden.

Insbesondere überführt diese Konstruktion einen deterministischen Büchi-Automaten in einen deterministischen Muller-Automaten.

(b) In einem deterministischen Muller-Automaten gibt es zu jedem Wort w genau einen Ablauf π. Das Wort w wird akzeptiert, genau dann, wenn $Inf(\pi) \in \mathcal{F}$ gilt. Und es wird nicht akzeptiert, genau dann, wenn $Inf(\pi) \notin \mathcal{F}$ gilt. Daher kann man Muller-Automaten einfach dadurch komplementieren, dass man $\mathcal{F}$ durch $2^Q \setminus \mathcal{F}$ ersetzt. Der dadurch entstehende Komplementautomat ist ebenfalls deterministisch.

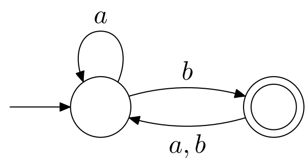
(c) Seien $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ und $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ zwei Muller-Automaten. Ein Muller-Automat A akzeptiert $L^\omega(M) \cap L^\omega(M')$, wenn man $A = (Q \times Q', \Sigma, \delta_A, (q_0, q_0'), F_A)$ wie folgt definiert:

- $\delta_A = \big\{\big((p,p'), a, (q,q')\big) \mid a \in \Sigma, (p,a,q) \in \delta \wedge (p',a,q') \in \delta'\big\}$
- $F_A = \{R \subseteq Q \times Q' \mid \pi(R) \in F \wedge \pi'(R) \in F'\}$, wobei $\pi : Q \times Q' \to Q$, $\pi' : Q \times Q' \to Q'$.

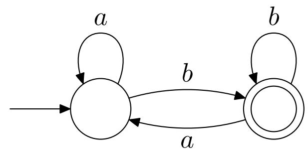
Dass diese Konstruktion korrekt ist, sieht man wie folgt: Es gilt $\pi(\inf(p)) = \inf(\pi(p))$ für einen Pfad p. Sei p_A ein akzeptierender Pfad in A, dann gibt es $R \in F_A$, sodass $\inf(p_A) = R$. Nach Definition gilt dann $\pi(R) \in F$, $\pi'(R) \in F'$. Weiter folgt $\inf(\pi(p_A)) = \pi(\inf(p_A)) = \pi(R) \in F$, analog für π'. Daher ist $\pi(p_A)$ bzw. $\pi'(p_A)$ ein akzeptierender Pfad in M bzw. M'.

Umgekehrt, seien p, p' akzeptierende Pfade in M bzw. M' für ein Wort aus $L^\omega(M) \cap L^\omega(M')$. Dann gibt es genau einen Pfad p_A, sodass $\pi(p_A) = p$, $\pi'(p_A) = p'$. Daraus folgt $\pi(\inf(p_A)) = \inf(\pi(p_A)) = \inf(p) \in F$ und ebenso für π'. Damit ist p_A ein akzeptierender Pfad in A.

(d) Die Sprache L aller unendlichen Wörter aus $\{a,b\}^\omega$, die unendlich viele b enthalten, kann von einem deterministischen Büchi-Automaten erkannt werden, z.B. von folgendem Automaten:



Man beachte, dass auch der folgende (nicht isomorphe) deterministische Büchi-Automat die Sprache akzeptiert:

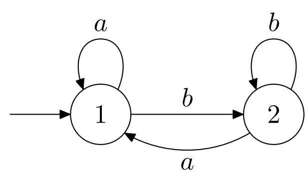


Daher gibt es nach (a) auch einen deterministischen Muller-Automaten, der L akzeptiert. Und nach (b) gibt es einen deterministischen Muller-Automaten, der das Komplement $\overline{L}$ von L akzeptiert. Die Sprache $\overline{L}$ enthält genau die Wörter, in denen b nur endlich oft vorkommt. Es gilt $\overline{L} = L((a+b)^*a^\omega)$.

Mit der gleichen Technik wie in der vorigen Aufgabe kann man nun zeigen, dass die Sprache $\overline{L}$ von keinem deterministischen Büchi-Automaten akzeptiert wird.

Aufgabe 2 *Deterministische Muller-Automaten*

(a) $A = (\{1,2\}, \{a,b\}, \delta, 1, \{\{2\}, \{1,2\}\})$, wobei δ die zugehörige Transititionsrelation ist:



(b) Nach Aufgabe 1(a) gibt es einen deterministischen Muller-Automaten, der L akzeptiert. Es bleibt noch zu zeigen, dass der Automat vollständig ist. Betrachte dazu die Akzeptanz-Bedingung $\mathcal{F} = \{R \subseteq Q \mid R \cap F \neq \emptyset\}$. Sei nun $R \in \mathcal{F}$ und $S \subseteq Q$ mit $R \subseteq S$. Dann gilt $R \cap F \neq \emptyset \overset{R \subseteq S}{\Rightarrow} S \cap F \neq \emptyset$ und damit $S \in \mathcal{F}$.

(c) Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \mathcal{F})$. Da B ein deterministischer Büchi-Automat ist, gibt es eine reguläre Sprache L, sodass $\overrightarrow{L} = L^\omega(B) = L^\omega(A)$. Seien nun T, T', $T \subseteq T'$ ω-erreichbar und $T \in \mathcal{F}$. Zu zeigen ist nun, dass $T' \in \mathcal{F}$ gilt. Dazu sei $A \in T$. Dann existiert ein endliches Wort u, sodass $\delta(q_0, u) = t$ und ein unendliches Wort v, sodass $\delta(t, v) \in T$ und T wird dabei nie verlassen und jeder Zustand unendlich oft gesehen. Induktiv werden nun Sequenzen von Wörtern $u_0, u_1, \ldots$ und $v_0, v_1, \ldots$ gebildet, sodass für alle $k \geq 0$ gilt:

- $u_0v_0u_1v_1 \ldots u_kv_k \in L$
- Falls $q_k = \delta(q_0, u_0v_0 \ldots u_{k-1}v_{k-1})$ und $\delta(q_k, u_k) = t$, sodass mit u_k jeder Zustand von T' mindestens einmal besucht wird und T' nicht verlassen wird.

Mit $u_0 = u$ und passender Wahl von u_k gilt, dass $w = u_0v_0u_1v_1 \ldots u_{k-1}v_{k-1}u_kv$ von A akzeptiert wird und ein endliches Präfix v_k von v existiert, sodass die erste obige Bedingung erfüllt wird.

Dann gilt $w \in \overrightarrow{L}$ und mit w wird jeder Zustand von T' unendlich oft besucht.

Aufgabe 3 *Gleichungen mit dem $\overrightarrow{\cdot}$-Operator*

(i) Falsch, denn für $L = \{aba^2ba^3 \dots ba^iba^i \mid i \geq 1\} = \{aba, aba^2ba^2, aba^2ba^3ba^3, \dots\}$ (jeweils Wörter endlicher Länge) gilt: $aba^2ba^3b \dots \in \overrightarrow{L}$ (unendlich langes Wort), aber $\notin L^\omega$.

(ii) Richtig (nachrechnen)

(iii) Richtig. Die erste Inklusion folgt unmittelbar aus der Definition von $\overrightarrow{L}$. Dass $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{A} + A\overrightarrow{B}$ gilt, sieht man mit folgender Fallunterscheidung: Falls $A \subseteq \Sigma^k$, dann gilt $\overrightarrow{A} = \emptyset$ und $\overrightarrow{AB} = A\overrightarrow{B}$. Anderenfalls sei $w \in \overrightarrow{AB}$. Dann besitzt w unendlich viele Präfixe in A oder nur endliche viele in A, aber unendlich viele in AB, insbesondere also müssen unendlich viele einen nicht-leeren Teil in B haben, also gilt $w \in A\overrightarrow{B}$.

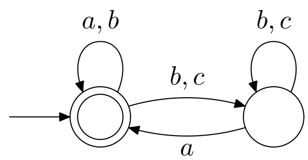
(iv) Richtig (folgt sofort aus (iii)).

(v) Wie bereits im Beweis von (iii) erwähnt: $\overrightarrow{A} = \emptyset$.

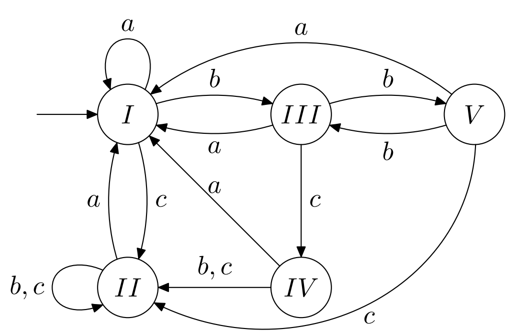
(vi) Wähle dazu etwa $A = a^*$ und $B = (a^2)^*$.

Aufgabe 4 *Büchi-Automaten*

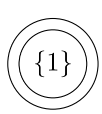
Folgender Büchi-Automat akzeptiert L:

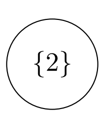


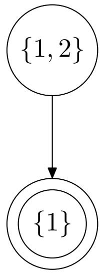
Mit der Konstruktion aus der Vorlesung erhält man folgenden deterministischen Rabin-Automaten:

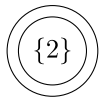


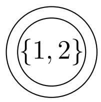
Dabei entsprechen die Zustände I - V folgenden Bäumen aus der Konstruktion („Endzuände" sind die im Algorithmus markierten Knoten):

- I: 

- II: 

- III: 

- IV: 

- V: 

Die Rabin Akzeptanz-Paare sind dann:

- $(\emptyset, \{I, IV, V\})$ für den Baum-Index 1 und
- $(\{I, II, IV, V\}, \{III\})$. Dieses Paar ist aber nicht erreichbar, da unendlich oft III zu sehen auch unendlich oft I, II oder V impliziert.