Technische Universität München
Institut für Informatik
PD Dr. Markus Holzer
Dipl.-Inf. Michael Tautschnig

WS 2007/2008
Übungsblatt 14
Mittwoch, 30. Januar 2007

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Aufgabe 1 *Muller-Automaten*

Ein Muller-Automat ist eine Variante eines Büchi-Automaten mit einer veränderten Akzeptanzbedingung. Formal ist ein Muller-Automat ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei Q, Σ, δ, q_0 wie bei Büchi-Automaten definiert sind und $F \subseteq 2^Q$ gilt. Die von A akzeptierte Sprache ist wie folgt definiert:

$$L^\omega(A) = \{\, w \in \Sigma^\omega \mid \text{es gibt eine Berechnung } \pi \text{ von } A \text{ auf } w \text{ so, dass } \inf(\pi_w) \in F \,\},$$

wobei $\inf(\pi_w)$ die Menge der Zustände ist, die bei der Berechung π unendlich oft durchlaufen werden.

(i) Zeigen Sie, dass man zu jedem Büchi-Automaten A einen Muller-Automaten B konstruieren kann, so dass $L^\omega(A) = L^\omega(B)$ gilt, d.h. beide Automaten erkennen dieselbe Sprache.

(ii) Zeigen Sie, dass die *deterministischen* Muller-Automaten unter Komplementbildung abgeschlossen sind.

(iii) Zeigen Sie, dass die *deterministischen* Muller-Automaten unter Schnittbildung abgeschlossen sind.

(iv) Beweisen Sie, dass *nicht* jeder *deterministische* Muller-Automat in einen *deterministischen* Büchi-Automaten umgewandelt werden kann.

Hinweis: Sie können folgenden Satz verwenden: Für einen deterministischen Büchi-Automaten A gilt

$$L^\omega(A) = \{\, w \in \Sigma^\omega \mid \text{unendlich viele Präfixe von } w \text{ sind in } L(A) \,\},$$

wobei $L(A)$ die Sprache von A ist, wenn man A als endlichen Automaten betrachtet.

Aufgabe 2 *Deterministische Muller-Automaten*

Wir definieren vollständige Muller-Automaten. Es sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein Muller-Automat. Eine Menge $R \subseteq Q$ heißt *ω-erreichbar* falls es eine Berechnung π von A auf einem Wort w gibt mit $\inf(\pi) = R$. Der Muller-Automat A ist *vollständig* genau dann, wenn für ω-erreichbare $R, S \subseteq Q$ gilt: $R \in F$ und $R \subseteq S$ impliziert $S \in F$.

(a) Geben Sie einen *deterministischen* Muller-Automaten an der vollständig ist und die Sprache

$$L = \{\, w \in \{a, b\}^\omega \mid w \text{ enthält unendlich oft den Buchstaben } b \,\}$$

akzeptiert.

(b) Zeigen Sie, dass man zu jedem deterministischen Büchi-Automaten A einen vollständigen *deterministischen* Muller-Automaten B konstruieren kann, so daß $L^\omega(A) = L^\omega(B)$ gilt, d.h., beide Automaten erkennen dieselbe Sprache.

(c) Zeigen Sie folgende Aussage: Wenn eine Sprache von einem *deterministischen* Muller-Automaten A akzeptiert wird und es einen deterministischen Büchi-Automaten B gibt mit $L^\omega(A) = L^\omega(B)$, dann ist der Automat A vollständig.

Aufgabe 3 *Gleichungen mit dem $\overrightarrow{\cdot}$-Operator*

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Gleichungen.

(i) $A^\omega = \overrightarrow{A^+}$

(ii) $\overrightarrow{A + B} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$

(iii) $A\overrightarrow{B} \subseteq \overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{A} + A\overrightarrow{B}$

(iv) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A} + A\overrightarrow{B}$, wenn $A \subseteq AB$

(v) Unter welcher Bedingung gilt $\overrightarrow{AB} = A\overrightarrow{B}$?

(vi) Finden Sie Mengen A, B mit $A \neq B$, aber $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$

Aufgabe 4 *Büchi-Automaten*

Konstruieren Sie einen (nichtdeterministischen) Büchi-Automaten mit höchstens zwei Zuständen, der die Sprache $L = \big((b + c)^* a + b\big)^\omega$ akzeptiert. Bestimmen Sie dann mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Konstruktion nach Safra den zugehörigen deterministischen Rabin-Automaten.