Technische Universität München
Institut für Informatik
PD Dr. Markus Holzer
Dipl.-Inf. Michael Tautschnig

WS 2007/2008
Übungsblatt 13
Mittwoch, 30. Januar 2008

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Lösungshinweise

Aufgabe 1 *Büchi-Automaten (1)*

Jedes unendliche Wort w, das von dem Büchi-Automaten akzeptiert wird, besteht aus Teilwörtern $w_1, w_2, \ldots$, wobei jedes w_i einem Pfad entspricht, der im Anfangszustand beginnt und endet. Es gilt damit

$$w_i \in L((c + ab + ba)(bb + aa)^* c)$$

und damit gilt:

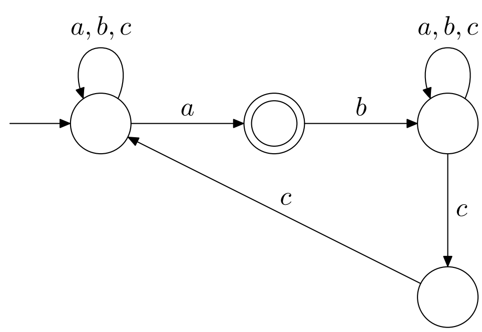
$$L^\omega(A) = L(((c + ab + ba)(bb + aa)^* c)^\omega).$$

Aufgabe 2 *Präfix-freie Mengen*

Sei $L = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und L_i, $1 \leq i \leq n$ präfix-frei. Angenommen, $\overrightarrow{L} \neq \emptyset$, dann existiert ein $w \in \overrightarrow{L}$, so dass gilt: Unendlich viele Präfixe von w sind in L enthalten. Da L_i präfix-frei ist, müssen je zwei Präfixe aus unterschiedlichen L_i sein. Daher können maximal n solcher Präfixe existieren, insbesondere also nur endlich viele.

Aufgabe 3 *Büchi-Automaten (2)*

(a) Wie man sich leicht überlegen kann, erkennt folgender Büchi-Automat die Sprache L:



(b) Da die ω-regulären Sprachen, d.h. die Sprachen, die von Büchi-Automaten erkannt werden, unter Komplement abgeschlossen sind, gilt offensichtlich, dass es auch einen (nichtdeterministischen) Büchi-Automaten gibt, der $\overline{L}$ erkennt.

Um zu zeigen, dass es keinen deterministischen Büchi-Automaten geben kann, der $\overline{L}$ erkennt, benutzen wir folgenden Satz: Für einen deterministischen Büchi-Automaten A gilt

$$L^\omega(A) = \{w \in \Sigma^\omega \mid \text{unendlich viele Präfixe von } w \text{ sind in } L(A)\},$$

wobei $L(A)$ die Sprache von A ist, wenn man A als endlichen Automaten betrachtet.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, $\overline{L}$ würde von einem deterministischen Büchi-Automaten erkannt. Wegen $abccb^\omega \in \overline{L}$ und der obigen Aussage, folgt, dass es eine natürliche Zahl n_1 gibt mit $abccb^{n_1} \in L(A)$. Nun ist aber auch $abccb^{n_1}abccb^\omega \in \overline{L}$. Wiederum folgt mit obiger Aussage, dass $abccb^{n_1}abccb^{n_2} \in L(A)$ für eine natürliche Zahl n_2. Etc.

Dies kann weiter iteriert werden und man erhält eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen $n_1, n_2, n_3, \ldots$, so dass das jeweilige Präfix in $L(A)$ ist. Umgekehrt muss daher das unendliche Wort

$$w = abccb^{n_1}abccb^{n_2}abccb^{n_3} \ldots$$

Element von $\overline{L}$ sein. Da w unendlich oft die Zeichenfolge $abcc$ enthält, ist dies ein Widerspruch.

Damit gibt es keinen deterministischen Büchi-Automaten, der die Sprache $\overline{L}$ erkennt.

Aufgabe 4 *Nicht ω-reguläre Sprache*

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ das zugrunde liegende Alphabet. Dann ist beispielsweise

$$L = \{a^n b^n c^\omega \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht ω-regulär, da $a^n b^n$ nicht regulär ist.