Technische Universität München
Institut für Informatik
PD Markus Holzer
Dipl.-Inf. Michael Tautschnig

WS 2007/2008
Übungsblatt 12
Mittwoch, 23. Januar 2008

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Lösungshinweise

Aufgabe 1 *Gleichungssysteme: Folgerungen aus den Axiomen*

1. $\emptyset \cdot \alpha = \emptyset$:

$$
\begin{array}{llcll}
(1) & \emptyset & = & \emptyset \cdot \emptyset & \text{Axiom 7} \\
(2) & \emptyset \cdot \alpha & = & (\emptyset \cdot \emptyset) \cdot \alpha & \text{Gl. (1)} \\
(3) & \emptyset \cdot \alpha & = & (\emptyset \cdot \emptyset) \cdot \alpha + \emptyset & \text{Axiom } 0'' \\
(4) & \emptyset \cdot \alpha & = & \emptyset \cdot (\emptyset \cdot \alpha) + \emptyset & \text{Axiom 2} \\
(5) & \emptyset \cdot \alpha & = & \emptyset^* \cdot \emptyset & \text{Gleichungsauflösung} \\
(6) & \emptyset \cdot \alpha & = & \emptyset & \text{Axiom 7}
\end{array}
$$

2. $\lambda \cdot \alpha = \alpha$:

$$
\begin{array}{llcll}
(1) & \alpha & = & \alpha & \text{Axiom } 0' \\
(2) & \alpha & = & \alpha + \emptyset & \text{Axiom } 0'' \\
(3) & \alpha & = & \alpha + \emptyset \cdot \alpha & \text{Teil 1.} \\
(4) & \alpha & = & \emptyset \cdot \alpha + \alpha & \text{Axiom 3} \\
(5) & \alpha & = & \emptyset^* \cdot \alpha & \text{Gleichungsauflösung} \\
(6) & \alpha & = & \lambda \cdot \alpha & \text{Axiom 0}
\end{array}
$$

3. $(a+b)* = a^*(a+b)*$

$$
\begin{array}{lrcll}
(1) & (a+b)^* & = & (a+b)(a+b)^* + \lambda & \text{Axiom 8} \\
(2) & a+a & = & a & \text{Axiom } 0''' \\
(3) & ((a+a)+b)(a+b)^* & = & (a+b)(a+b)^* + \lambda & \text{Gl. 2} \\
(4) & (a+b)(a+b)^* + \lambda & = & ((a+a)+b)(a+b)^* + \lambda & \text{Gl. 3} \\
(5) & (a+a)+b & = & a+(a+b) & \text{Axiom 1} \\
(6) & ((a+a)+b)(a+b)^* & = & (a+(a+b))(a+b)^* + \lambda & \text{Gl. 4,5} \\
(7) & (a+(a+b))(a+b)^* & = & a(a+b)^* + (a+b)(a+b)^* & \text{Axiom 5} \\
(8) & (a+(a+b))(a+b)^* + \lambda & = & (a(a+b)^* + (a+b)(a+b)^*) + \lambda & \text{Axiom } 0''' \\
(9) & (a+b)^* & = & ((a+a)+b)(a+b)^* + \lambda & \text{Gl. } 1 = 4 \\
(10) & (a+b)^* & = & (a+(a+b))(a+b)^* + \lambda & \text{Gl. 9,6} \\
(11) & (a+b)^* & = & (a(a+b)^* + (a+b)(a+b)^*) + \lambda & \text{Gl. 10,8} \\
(12) & (a(a+b)^* + (a+b)(a+b)^*) + \lambda & = & a(a+b)^* + ((a+b)(a+b)^* + \lambda) & \text{Axiom 1} \\
(13) & (a+b)^* & = & a(a+b)^* + ((a+b)(a+b)^* + \lambda) & \text{Gl. } 11 = 12 \\
(14) & (a+b)^* & = & a^*((a+b)(a+b)^* + \lambda) & \text{Gleichungsaufl.} \\
(15) & a^*(a+b)^* & = & a^*((a+b)(a+b)^* + \lambda) & \text{Gl. 1} \\
(16) & a^*((a+b)(a+b)^* + \lambda) & = & a^*(a+b)^* & \text{Gl. 15} \\
(17) & (a+b)^* & = & a^*(a+b)^* & \text{Gl. } 14 = 16
\end{array}
$$

Aufgabe 2 *Gleichungssysteme und endliche Automaten*

(a) Das Gleichungssystem für den endlichen Automaten lautet:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ und $\vec{\delta} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \emptyset \end{pmatrix}$.

(b) Wie man sich leicht klar machen kann, muß der Eintrag an der Stelle (i, j) in der Matrix M^* gerade jener regulären Menge von Wörtern entsprechen um vom Zustand i in den Zustand j zu gelangen. Damit sieht man sofort, daß der Eintrag links oben $\alpha = (a + ba^*b)^*$ lauten muß. Der Eintrag rechts oben ist dann αba^* (man kann mehrmals von Zustand 1 nach 1 gehen und dann durch lesen von ba^* nach Zustand 2 gelangen. Entsprechen geht für die restlichen Einträge vor. Damit erhalten wir

$$M^* = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha ba^* \\ \alpha ba^* & \alpha \end{pmatrix}.$$

Als Lösung ergibt sich dann

$$L = M^*\vec{\delta} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha ba^* \\ \alpha ba^* & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha ba^* \end{pmatrix}.$$

Der Automat akzpetiert daher die Sprache $\alpha = (a + ba^*b)^*$.

(c) Wir überprüfen ob die Lösung korrekt ist. Zu diesem Zweck setzen wir in die Rekursionsgleichung ein. Damit erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha ba^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\alpha ba^* + \lambda \\ b\alpha + a\alpha ba^* \end{pmatrix}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\begin{aligned} \alpha &= a\alpha + b\alpha ba^* + \lambda \\ \alpha ba^* &= b\alpha + a\alpha ba^*. \end{aligned}$$

Wir zeigen nur wie man die erste Gleichung beweist, da die zweite Gleichung mit ähnlichen Argumenten beweisen werden kann. Für die erste Gleichung argumentieren wie wie folgt: Offensichtlich gilt (i) $a\alpha \subseteq \alpha$ und (ii) $\lambda \subseteq \alpha$. (iii) Sei nun $u \in b\alpha ba^*$. damit lässt sich u in Teilwörter $u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}$ zerlegen mit $u = u_0 u_1 \ldots u_n u_{n+1}$ und $u_0 = b$, $u_i \in a^*ba^*b$ mit $1 \leq i \leq n$, und $u_{n+1} \in a^*ba^*$. Damit gilt:

$$u = b \cdot a^{i_{11}} ba^{i_{12}} b \cdots a^{i_{n1}} ba^{i_{n2}} b \cdot a^{i_{(n+1)1}} ba^{i_{(n+1)2}}.$$

Damit folgt $b\alpha ba^* \subseteq \alpha$. Die Rückrichtung d.h. $\alpha \subseteq a\alpha + b\alpha ba^* + \alpha$ folgt mit ähnlichen Mitteln.

Daher ist $\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha ba^* \end{pmatrix}$ die gesuchte Lösung mit $\alpha = (a + ba^*b)^*$.

Aufgabe 3 *Transitionsmonoid*

(a) Das Transitionsmonoid enthält die Abbildungen λ_A, $a_A = a_A^2$, $b_A = ab_A$, und $ba_A = 0$. Als Verknüpfungstafel erhält man:

λ_A	a_A	b_A	ba_A
a_A	a_A	b_A	ba_A
b_A	ba_A	ba_A	ba_A
ba_A	ba_A	ba_A	ba_A

(b) Folgender Myhill-Graph akzeptiert $L(A)$: