

## Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

### Lösungshinweise

#### Aufgabe 1    *Reguläre Ausdrücke*

Der Zustand 4 kann mit keiner Regel eliminiert werden, da kein Endzustand erreichbar ist. Damit kann er aber auch ignoriert werden. Die Anwendung der Regeln in der Reihenfolge I-S-E-K-E-S-K-E-E führt zum regulären Ausdruck  $(a^*a^3 + a^*b)(a^3 + ab)^*$ . Mit der Reihenfolge I-E-E-S-K-S-K-E-E-K erhält man den Ausdruck  $a^*a^3(a^3+ab)^*+a^*b(a^3+ab)^*$ .

#### Aufgabe 2    *Transitionsmonoid*

Das Transitionsmonoid enthält die Abbildungen  $a_A, b_A, ab_A, ba_A, bb_A, aba_A, abb_A, bab_A, bba_A, babb_A, bbab_A$  und  $\lambda_A$ .

#### Aufgabe 3    *Erkennbarkeit*

(a) Für ein Wort  $w = a_1 \dots a_n$  mit  $n \geq 1$  und  $a_i \in \{0, 1\}$  gilt:

$$h(w) = h(a_1 \dots a_n) = h(a_1) \circ h(a_2) \circ \dots \circ h(a_n) = h(a_n);$$

ferner gilt  $h(\lambda) = e$ . Also ist  $h(L) = \{a\}$ . Es gilt  $w \in h^{-1}(a)$  genau dann, wenn  $h(w) = h(a_n) = a$  und dies gilt genau dann wenn  $a_n = 0$ . Somit gilt  $L = h^{-1}(h(L))$ .

(b) Es gilt  $uR_Lv$  falls  $u = v = \lambda$  oder  $u, v \in \{0, 1\}^*0$  oder  $u, v \in \{0, 1\}^*1$ . Daher gibt es drei Äquivalenzklassen, die sich beim Verknüpfen wie  $e, a$  und  $b$  verhalten. Damit ist  $M$  isomorph zu  $\{0, 1\}^*/R_L$ .

#### Aufgabe 4    *Syntaktisches Monoid*

Angenommen für ein  $\Sigma$  und ein  $L \subseteq \Sigma^*$  ist das syntaktische Monoid von  $L$  isomorph zu  $M$ , d.h.  $R_L$  hat die Äquivalenzklassen  $[\lambda], [u_1], [u_2]$  und  $[u_3]$  mit  $[u_i u_j] = [u_j]$  für  $1 \leq i, j \leq 3$ . Da  $u_1 R_L u_2$  nicht gilt, gibt es  $w, w' \in \Sigma^*$  mit folgender Eigenschaft: Entweder  $wu_1 w' \in L$  oder  $wu_2 w' \in L$ . Dies kann man einfach herleiten, indem man  $\neg(uR_Lv)$  bestimmt.

Wäre  $w' \notin [\lambda]$ , dann ist  $wu_1 w' R_L w' R_L wu_2 w'$ . Aus den Eigenschaften von  $R_L$  folgt daher  $wu_1 w' \in L \iff wu_2 w' \in L$ , was ein Widerspruch zu oben ist. Also ist  $w' \in [\lambda]$ . Somit ist  $wu_1 w' R_L u_1$  und  $wu_2 w' R_L u_2$ . Demnach gilt ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $u_1 \in L$  und  $u_2 \notin L$ .

Analog ergibt sich  $u_3 \in L$ , da  $u_2 \notin L$ , aber auch  $u_3 \notin L$ , da  $u_1 \in L$ . Daher kann  $M$  nicht das syntaktische Monoid einer Sprache  $L$  sein.