Technische Universität München
Institut für Informatik
PD Dr. Markus Holzer
Dipl.-Inf. Michael Tautschnig

WS 2007/2008
Übungsblatt 8
Mittwoch, 12. Dezember 2007

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Lösungshinweise

Aufgabe 1 *Satz von Rice: Alternative Formulierung*

Betrachte die Funktion $\xi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ definiert vermöge

$$\xi(i,j) = \begin{cases} \Theta(j) & \text{falls } P_i \text{ auf } i \text{ in höchstens } j \text{ Schritten \textit{nicht} hält} \\ \perp & \text{falls } P_i \text{ auf } i \text{ in höchstens } j \text{ Schritten hält} \end{cases}$$

Die Funktion $\xi(i,j)$ ist berechenbar. Daher gibt es einen Index e mit $\xi = \varphi_e$. Mit Hilfe des s-m-n Theorems folgt die Existenz einer totalen und berechenbaren Funktion f mit $\xi(i,j) = \varphi_{f(i)}(j)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} i \in K &\Leftrightarrow P_i \text{ hält auf } i \\ &\Leftrightarrow P_i \text{ hält auf } i \text{ in genau } j \text{ Schritten für ein } j \\ &\Rightarrow \varphi_{f(i)}(x) = \Theta(x) \text{ für } x < j \text{ und } \varphi_{f(i)}(x) = \perp \text{ für } x \geq j \text{ für ein } j \\ &\Rightarrow \varphi_{f(i)} \leq \Theta \text{ und } \mathrm{dom}(\varphi_{f(i)}) \text{ endlich} \\ &\Rightarrow f(i) \in \bar{I} \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} i \in \bar{K} &\Leftrightarrow P_i \text{ hält auf } i \text{ nicht} \\ &\Leftrightarrow \varphi_{f(i)} = \Theta \\ &\Rightarrow f(i) \in I \end{aligned}$$

Hieraus schließen wir $i \in \bar{K} \Leftrightarrow f(i) \in I$. Damit haben wir $\bar{K}$ auf I reduziert, aber das (spezielle) Halteproblem K ist unentscheidbar. Damit kann auch I nicht rekursiv aufzählbar sein.

Aufgabe 2 *(Nicht) Rekursiv aufzählbar (2)*

(i) Die Menge ist (nach Satz von Rice) nicht rekursiv; die Dovetailing-Tachnik zeigt, dass die Menge rekursiv aufzählbar ist: dazu betrachten wir eine Aufzählung aller Tripel (i,j,k) (ähnlich wie beim Cantor-Aufzählungsschema) und simulieren damit die Programme $P_i(j)$ exakt k Schritte. Liefert eines der Programme einen Wert, so geben wir den Index i aus.

(ii) Die Menge ist ebenfalls nicht rekursiv, aber rekursiv aufzählbar (ähnlich wie im letzten Beispiel verwendet man den Satz von Rice und Dovetailing).

(iii) Die Menge ist nicht rekursiv (Rice) und nicht rekursiv aufzählbar (Erweiterung des Satzes von Rice). Man wähle etwa $\theta(0) = 0$ und undefiniert sonst sowie $\hat{\theta}(n) = n$; beide Funktionen sind berechenbar. Dann gilt $\{i \mid \varphi_i = \theta\}$ ist Teilmenge von I_3; zudem ist $\{i \mid \varphi_i = \hat{\theta}\}$ Teilmenge des Komplements von I_3 (alle Funktionen mit unendlichem Domain).

(iv) Mit der zweiten Erweiterung des Satzes von Rice erhält man, dass I_4 nicht rekursiv aufzählbar ist (man wähle etwa $\theta(n) = n$).

(v) Man kann zeigen (ohne Beweis), dass bereits wenige Variablen (dies hängt wesentlich von der Form der WHILE-Kontrollfluss anweisung ab) ausreichen, um alle WHILE-Programme zu simulieren. Damit enthält I_5 alle berechenbaren Funktionen, d.h. $I_5 = \mathbb{N}$; I_5 ist daher rekursiv und somit auch rekursiv aufzählbar.

(vi) Obwohl der Satz von Rice *nicht* anwendbar ist, ist die Menge I_6 rekursiv (aus einem gegebenen Programmindex kann der WHILE-Quellcode rekonstruiert und damit getestet werden, ob maximal 3 Variablen verwendet werden).