Technische Universität München
Institut für Informatik
PD Dr. Markus Holzer
Dipl.-Inf. Michael Tautschnig

WS 2007/2008
Übungsblatt 7
Mittwoch, 5. Dezember 2007

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Lösungshinweise

Aufgabe 1 *μ-rekursive Funktionen*

Siehe Hinweis zu Aufgabe 4 auf Blatt 6.

Aufgabe 2 *(Nicht) Rekursiv aufzählbar*

(i) Falsch; man betrachte beispielsweise die Mengen $\mathbb{N}$ und $K = \{k \mid \varphi_k(k) \text{ terminiert}\}$.

(ii) Falsch; man betrachte als Gegenbeispiel $A = \mathbb{N}$ und $B = \{k \mid \varphi_k \text{ ist total}\}$; dann ist $A \cup B = A$ und damit rekursiv aufzählbar. B ist jedoch nicht rekursiv aufzählbar.

(iii) Falsch; man betrachte wiederum die Mengen $\mathbb{N}$ und B.

(iv) Wahr; seien A und B Mengen und f, g totale und berechenbare Funktionen mit $A = \text{range}(f)$ und $B = \text{range}(g)$. Wir unterscheiden zwei Fälle. Falls $A \cap B$ endlich, existiert offensichtlich eine totale und berechenbare Funktion h mit $A \cap B = \text{range}(h)$. Andernfalls sei $A \cap B$ unendlich. Man betrachte das folgende Programm:

$n := 0$
while true do
  $x := \tau_1(n)$;
  $y := \tau_2(n)$;
  if $f(x) = g(y)$ **then output** $f(x)$
  $n := succ(n)$
od

wobei $\tau : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ die bijektive Abbildung aus dem Cantor-Abzählschema ist und $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jene Abbildungen mit der Eigenschaft $\tau(\tau_1(n), \tau_2(n)) = n$ sind. Definiere die Funktion $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wie folgt: $h(n)$ ist das $n+1$-te Element, das von obigem Programm ausgegeben wird; h ist total und berechenbar und es gilt $A \cap B = \text{range}(h)$.

Aufgabe 3 *Rekursiv und Rekursiv Aufzählbar*

- „$\Rightarrow$”: Aus der Vorlesung ist bereits bekannt, dass mit A rekursiv auch $\bar{A}$ rekursiv gilt. Da jede rekursive Menge auch rekursiv aufzählbar ist, folgt die Behauptung.

- „$\Leftarrow$": Wenn entweder A oder $\bar{A}$ die leere Menge ist, dann ist A offensichtlich rekursiv. Sei nun weder $A = \emptyset$ noch $\bar{A} = \emptyset$ und $A = \text{range}(f)$, $\bar{A} = \text{range}(g)$ für totale und berechenbare Funktionen f und g. Dann entscheidet folgender Algorithmus die Frage $x \in A$:

  Berechne $f(0), g(0), f(1), g(1), \ldots, f(i), g(i), \ldots$ für $i \in \mathbb{N}$. Wenn x als Wert von f vorkommt, dann gilt $x \in A$; wenn x als Wert von g vorkommt, so gilt $x \notin A$.

  Die Korrektheit folgt aus $\text{range}(f) \cap \text{range}(g) = \emptyset$ und $\text{range}(f) \cup \text{range}(g) = \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 *Reduktionen*

Wir zeigen zuerst $\{i \mid W_i \text{ unendlich}\} \leq_m \{i \mid \varphi_i \text{ total}\}$. Mittels Dovetailing konstruieren wir zu jedem i eine Funktion ψ, sodass jeder Wert $z \in W_i$ exakt ein Mal als Bild von ψ vorkommt; ψ ist dann und nur dann total, wenn W_i unendlich ist. Diese Konstruktion wird berechenbar sein und somit (für jedes i) einen Index für ψ liefern.
Betrachten wir den folgenden berechenbaren Vorgang: Auf Eingabe l zählen wir (wie im Cantor-Verfahren) alle Tupel (j, k) auf und simulieren für jedes Tupel die Funktion φ_i auf dem Input j exakt k Schritte (man beachte dass $W_i = \text{dom}(\varphi_i)$). Während dieses Vorganges zählen wir mit, wie oft eine der Simulationen terminiert. Die Simulation endet sobald das l-te Ergebnis (auf Eingabe j) erzielt wurde; in diesem Fall setzen wir $\psi(l) = j$. Die erhaltene Funktion ψ ist dann und nur dann total, wenn W_j unendlich war (denn nur dann gibt es unendlich viele Stellen aus dem Domain von φ_i). Zudem ist die Konstruktion der Funktion ψ effektiv berechenbar, d.h., es gibt eine totale und berechenbare Funktion f mit $\varphi_{f(i)} = \psi$. Somit gilt:

$$x \in \{i \mid W_i \text{ unendlich}\} \Leftrightarrow f(x) \in \{i \mid \varphi_i \text{ total}\},$$

was zu zeigen war.

Wir zeigen nun die andere Richtung: $\{i \mid \varphi_i \text{ total}\} \leq_m \{i \mid W_i \text{ unendlich}\}$. Um zu testen, ob eine Funktion φ_j total ist, konstruieren wir die Funktion

$$\psi(z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_j(w) \text{ für alle } w \leq z \text{ terminiert} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktion φ_j ist dann und nur dann total, wenn W_ψ unendlich ist; dass ψ berechenbar ist, kann man einfach durch Dovetailing sehen (vgl. Aufgabe 4 auf Blatt 4).