Technische Universität München
Institut für Informatik
PD Dr. Markus Holzer
Dipl.-Inf. Michael Tautschnig

WS 2007/2008
Übungsblatt 7
Freitag, 30. November 2007

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Aufgabe 1 *μ-rekursive Funktionen*

Erweitert man die Definition der primitiv rekursiven Funktionen (Übungsblatt 6, Aufgabe 3) um die μ-Rekursion, so erhält man die Klasse der μ-rekursiven Funktionen. Die μ-Rekursion ist wie folgt definiert: Sei $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ eine $n+1$ stellige (μ-rekursive) Funktion; dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= \mu y[h(x_1, \ldots, x_n, y) = 0] \\ &= \begin{cases} z & \text{falls } h(x_1, \ldots, x_n, y) \text{ für alle } y \leq z \text{ definiert ist,} \\ & h(x_1, \ldots, x_n, z) = 0 \text{ und} \\ & h(x_1, \ldots, x_n, y) \neq 0 \text{ für } y < z \\ \perp & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Klasse der μ-rekursiven Funktionen mit der Klasse der WHILE-berechenbaren Funktionen übereinstimmt.

Hinweis: Für die eine Richtung genügt es sich zu überlegen, wie man die WHILE-Kontrollflussanweisung der Form **while** $X_i \neq 0$ **do** ... **od** durch eine μ-rekursive Funktion darstellen kann. Zusätzlich dürfen Sie annehmen, dass das "simultane Rekursionsschema" die Klasse der primitiv rekursiven Funktionen nicht erweitert:

Das simulatane Rekursionsschema ist primitiv rekursiv; seien $g_i : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h_i : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq m$ primitiv rekursiv, so sind auch die Funktionen $f_i : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$\begin{aligned} f_i(x_1, \ldots, x_n, 0) &= g_i(x_1, \ldots, x_n) \\ f_i(x_1, \ldots, x_n, y+1) &= h_i(x_1, \ldots, x_n, y, f_1(x_1, \ldots, x_n, y), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n, y)) \end{aligned}$$

primitiv rekursiv (ohne Beweis).

Aufgabe 2 *(Nicht) Rekursiv aufzählbar*

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) Jede Teilmenge einer rekursiven Menge ist rekursiv.

(ii) Die Mengen A und B sind genau dann rekursiv aufzählbar, wenn $A \cup B$ rekursiv aufzählbar ist.

(iii) Jede Teilmenge einer rekursiv aufzählbaren Menge ist rekursiv aufzählbar.

(iv) Rekursiv aufzählbare Mengen sind unter Schnittbildung abgeschlossen.

Aufgabe 3 *Rekursiv und Rekursiv Aufzählbar*

Beweisen Sie folgende Aussage: Eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$ ist rekursiv genau dann, wenn A und $\bar{A} := \mathbb{N} \setminus A$ rekursiv-aufzählbar sind.

Aufgabe 4 *Reduktionen*

Eine Menge A ist many-one reduzierbar auf eine Menge B (geschrieben $A \leq_m B$), falls es eine totale und berechenbare Funktion f gibt mit

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Zwei Mengen A und B sind many-one äquivalent, falls $A \leq_m B$ und $B \leq_m A$; in diesem Fall schreiben wir $A \equiv_m B$.

Zeigen Sie: $\{i \,|\, W_i \text{ unendlich}\} \equiv_m \{i \,|\, \varphi_i \text{ total}\}$

Hinweis: Konstruieren Sie f mittels Dovetailing.