Technische Universität München
Institut für Informatik
PD Dr. Markus Holzer
Dipl.-Inf. Michael Tautschnig

WS 2007/2008
Übungsblatt 6
Mittwoch, 21. November 2007

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Aufgabe 1 *Akzeptable Programmiersysteme (1)*

Seien $A_0, A_1, \ldots$ und $B_0, B_1, \ldots$ zwei akzeptable Programmiersysteme. Zeigen Sie, dass es eine unäre Funktion geben muss, die in beiden Aufzählungen den gleichen Index besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Aufzählung $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ und weisen Sie nach, dass diese selbst wieder ein akzeptables Programmiersystem ist. Wenden Sie dann das Rekursionstheorem an.

Aufgabe 2 *Akzeptable Programmiersysteme (2)*

Geben Sie Beispiele für akzeptable Programmiersysteme $A_0, A_1, \ldots$ mit folgenden Eigenschaften an:

(i) Es gibt *kein* $i \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_i = \alpha_{i+1} = \alpha_{i+2}$.

(ii) Für jede berechenbare Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_i = \alpha_{i+1} = \cdots = \alpha_{i+k} = \varphi$.

Aufgabe 3 *Primitiv Rekursive Funktionen*

Die Klasse der primitiv rekursiven Funktionen $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ist wie folgt induktiv definiert:

- Die nullstelligen Funktionen (Konstanten) sind primitiv rekursiv.
- Die Nachfolgerfunktion $s(n) = n + 1$ ist primitiv rekursiv.
- Die Vorgängerfunktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch

  $$p(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ n - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

  ist primitiv rekursiv.
- Die Projektionsfunktionen $u_j^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, definiert durch

  $$u_j^n(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = x_j$$

  ist primitiv rekursiv.
- Die “Funktionskomposition” ist primitiv rekursiv, d.h. für alle primitiv rekursiven Funktionen $g : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ und $h_1, \ldots, h_m : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ist die Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, definiert durch

  $$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$$

  ebenfalls primitiv rekursiv.

- Das “Rekursionsschema” ist primitiv rekursiv, d.h. für alle primitiv rekursiven Funktionen $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ und $h : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ ist die Funktion $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, definiert durch

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n, 0) &= g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n, y+1) &= h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)) \end{aligned}$$

  ist primitiv rekursiv.

Benutzen Sie diese Definition und zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv rekursiv sind:

(i) $f_1(x) = x + 2$

(ii) $f_2(x, y) = x + y$

(iii) $f_3(x, y) = x * y$

Aufgabe 4 *Primitive Rekursion und LOOP-Berechenbarkeit*

Zeigen Sie, dass die Klasse der primitiv rekursiven Funktionen mit der Klasse der LOOP-berechenbaren Funktionen übereinstimmt.