Technische Universität München
Institut für Informatik
PD Dr. Markus Holzer
Dipl.-Inf. Michael Tautschnig

WS 2007/2008
Übungsblatt 5
Mittwoch, 21. November 2007

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Lösungshinweise

Aufgabe 1 *s-m-n Theorem*

Wir definieren die Funktion

$$\theta(m,n,x) = \underbrace{\varphi_m \circ \ldots \circ \varphi_m}_{n\,\text{mal}}.$$

Die Funktion θ ist berechenbar, da wir ein einfaches WHILE-Programm angeben können:

$/* X_1 = m, X_2 = n, X_3 = x */$
$\quad ZERO := 0$
$\quad$ **while** $X_2 \neq ZERO$ **do**
$\quad\quad X_3 := \Phi(X_1, X_3)$
$\quad\quad X_2 := pred(X_2)$
$\quad$ **od**
$\quad X_1 := X_3$

Da θ berechenbar ist, gibt es einen Index e, sodass $\varphi_e^{(3)}(m,n,x) = \theta(m,n,x)$. Nach dem s-m-n Theorem gibt es eine totale und berechenbare Funktion $s_1^2 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ so daß für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi_e^{(3)}(m,n,x) = \varphi^{(1)}_{s_1^2(e,m,n)}(x).$$

Die Funktion s_1^2 ist noch nicht die gesuchte Funktion f, da f zweistellig sein muss. Wir wenden daher das s-m-n Theorem noch einmal an, diesmal aber auf s_1^2. Da s_1^2 ebenfalls total und berechenbar ist, gibt es einen Index e', so dass $s_1^2(e,m,n) = \varphi_{e'}^{(3)}(e,m,n)$. Aus dem s-m-n Theorem folgt, dass es eine totale und berechenbare Funktion s_2^1 gibt mit $\varphi_{e'}^{(3)}(e,m,n) = \varphi^{(2)}_{s_2^1(e',e)}(m,n)$. Damit erhält man:

$$\theta(m,n,x) = \varphi_e^{(3)}(m,n,x) = \varphi^{(1)}_{s_1^2(e,m,n)}(x) = \varphi^{(1)}_{\varphi^{(3)}_{e'}(e,m,n)}(x) = \varphi^{(1)}_{\varphi^{(2)}_{s_2^1(e',e)}(m,n)}(x).$$

Die gesuchte Funktion f ist daher $f = \varphi^{(2)}_{s_2^1(e',e)}$; f ist aus zweimaliger Anwendung des s-m-n Theorems entstanden und daher total und berechenbar.

Aufgabe 2 *Halteproblem*

Man reduziert das Halteproblem

$$H = \{i \mid \varphi_i(i) \text{ terminiert}\}$$

auf die angegebene Menge. Nehmen wir an, es gibt ein WHILE-Programm P, das die charakteristische Funktion der Menge $\{(i,j) \mid \varphi_i(\varphi_j(i)) \text{ terminiert}\}$ berechnet. Um zu entscheiden, ob ein Index i in H enthalten ist, genügt es P auf dem Tupel (i,e) auszuführen, wobei e ein Index der identischen Funktion $f(x) = x$ ist. Damit wäre H entscheidbar, was im Widerspruch zur Unentscheidbarkeit von H steht.

Aufgabe 3 *Programmtransformation*

Sei f jene Programmtransformation, die jede *pred*-Anweisung durch eine *succ*-Anweisung ersetzt und umgekehrt. Diese Funktion ist total und berechenbar (f nimmt den Index eines Programms, reproduziert daraus den Programmcode, führt die entsprechenden Ersetzungen durch und berechnet schließlich den Index der modifizierten Funktion). Wir betrachten nun das Programm

$$P_n(x) = X_2 := 0;$$

P_n als einstelliges Programm interpretiert berechnet die identische Funktion. In diesem Programm kommt weder ein *succ* noch ein *pred* vor; daher ist $f(n) = n$. Trivialerweise gilt daher $\varphi_n^{(1)} = \varphi_{f(n)}^{(1)}$.
Betrachten wir nun das Programm $P_{n'}$, welches aus P_n produziert wird. Wie man sich leicht überzeugen kann, berechnet $P_{n'}$ ebenfalls die identische Funktion. Wendet man die Programmtransformation f jedoch auf $P_{n'}$ an, so erhält man das Programm

$$\begin{aligned} P_{f(n')} &= X_1 := \mathit{pred}(X_1); X_1 := \mathit{succ}(X_1); P_{f(n)} && (1) \\ &= X_1 := \mathit{pred}(X_1); X_1 := \mathit{succ}(X_1); P_n && (2) \end{aligned}$$

Auf Eingabe 0 berechnet $P_{f(n')}$ den Wert 1, während $P_{n'}$ auf Eingabe 0 den Wert 0 ausgibt. Daher gilt $\varphi_{n'}^{(1)} \neq \varphi_{f(n')}^{(1)}$.

Aufgabe 4 *Totalitätsproblem*

Angenommen, das Totalitätsproblem T wäre entscheidbar; dann ist f total und berechenbar. Aus dem Rekursionstheorem folgt, dass es für f einen Index e gibt mit $\varphi_e = \varphi_{f(e)}$. Unterscheiden wir nun zwei Fälle. Falls $e \in T$, dann ist φ_e nach Definition von T total; jedoch ist $\varphi_{f(e)} = \perp$, somit $\varphi_e \neq \varphi_{f(e)}$. Gilt andererseits $e \notin T$, dann ist φ_e nicht total, jedoch $\varphi_{f(e)}$ ist nach Definition total; somit gilt auch hier $\varphi_e \neq \varphi_{f(e)}$. Beide Fälle führen zu einem Widerspruch, somit kann T nicht entscheidbar sein.

Aufgabe 5

Ja, es gibt diesen Index (und damit eine berechenbare Funktion $f = \varphi_e$). Dies sieht man wie folgt: entweder existiert ein x auf dem φ_e divergiert oder nicht. Im letzteren Fall sind alle Stellen nicht divergent und daher insbesondere gleich 1; dies führt aber sofort zu einem Widerspruch, da es dann nach Definition mindestens eine divergente Stelle geben müsste.
Sei daher l die kleinste Stelle an der φ_e divergent ist. Wir unterscheiden nun wieder zwei Fälle. Im ersten Fall ist $l \geq 1$. Da l die kleinste divergente Stelle ist, terminiert $\varphi_e(m)$ für alle $m < l$; insbesondere haben diese Stellen den Wert 1. Betrachten wir nun die Stelle $l - 1$. Da $\varphi_e(l-1) = 1$ aufgrund der vorherigen Überlegung ist, gibt es nach Definition eine Stelle $k < l - 1$ mit $\varphi_e(k)$ divergiert. Somit war l nicht die kleinste divergente Stelle und wir erhalten einen Widerspruch.
Daher ist nur der zweite Fall möglich (d.h. die Funktion φ_e divergiert bereits an der Stelle 0); dies ist konsistent mit der Definition. Damit muss aber $\varphi_e(x) = 1$ für $x \geq 1$ gelten.
Die gesuchte Funktion φ_e sieht also wie folgt aus: auf Stelle 0 divergiert sie, an allen anderen Stellen liefert sie 1. Diese Funktion ist offensichtlich berechenbar.