Technische Universität München
Institut für Informatik
PD Dr. Markus Holzer
Dipl.-Inf. Michael Tautschnig

WS 2007/2008
Übungsblatt 4
Mittwoch, 14. November 2007

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Lösungshinweise

Aufgabe 1 *Universelle Funktionen (1)*

(i) $F(e,x) = x^{2e+1}$

(ii) $F(e,x) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{x}}}}}}}_{e-\text{mal}}$

(iii) Sei $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Definiere

$$c_i(e) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (e \bmod n) + 1 = i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist beispielsweise eine universelle Funktion F für $\mathcal{F}$ gegeben durch

$$F(e,x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(e) f_i(x).$$

Aufgabe 2 *Universelle Funktionen (2)*

(i) Da F eine universelle Funktion ist, kann man $\mathcal{F}$ aufzählen. Sei $f_0, f_1, f_2, \ldots$ die durch F induzierte Aufzählung. Definiere eine (totale, unäre) Funktion $\tilde{f}$ durch $\tilde{f}(x) = f_x(x) + 1$. Wir zeigen, dass $\tilde{f}$ nicht in der Aufzählung vorkommt. Dazu nehmen wir das Gegenteil an. Wäre $\tilde{f}$ in $\mathcal{F}$ enthalten, dann gäbe es eine Zahl e mit $F(e,x) = \tilde{f}(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Universalität von F berechnet F jedoch eine Funktion f_e: $F(e,x) = f_e(x)$. Insbesondere gilt daher $F(e,e) = f_e(e)$. Andererseits ist jedoch $F(e,e) = \tilde{f}(e) = f_e(e) + 1$, ein Widerspruch.

(ii) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Menge aller totalen, unären und berechenbaren Funktionen *nicht effektiv* aufzählbar ist. Die Existenz einer universellen berechenbaren Funktion F würde jedoch sofort ein effektives Aufzählungsverfahren liefern $(F(0,x), F(1,x), F(2,x), \ldots)$.

(iii) Man wähle etwa die Familie aller konstanten Funktionen; deren universelle Funktion ist gegeben durch $F(e,x) = e$. Diese Funktion ist durch ein triviales WHILE-Programm berechenbar.

Aufgabe 3 *Universelle Funktionen (3)*

Da Φ die universelle Funktion ist, gilt: $\Phi(e,a) = \varphi_e^{(1)}(a) = \varphi_e^{(2)}(a,0)$; der Übergang von einer einstelligen zu einer zweistelligen Funktion kann durch Nullsetzen des zweiten Arguments realisiert werden. Zudem berechnet P_e die Funktion Φ, d.h. es gilt $\varphi_e^{(2)}(e,a) = \Phi(e,a)$. Daher gilt $\varphi_e^{(2)}(a,0) = \varphi_e^{(2)}(e,a)$.

Aufgabe 4 *Berechenbare Funktionen*

Die Funktionen ψ_1, ψ_2 und ψ_3 sind durch die folgenden Programme berechenbar:

(i) Wir verwenden das universelle Programmm, um die ersten z Schritte von $\varphi_x(y)$ zu simulieren. Falls $\varphi_x(y)$ in diesem Zeitraum terminiert, geben wir 1 aus, sonst 0.

(ii) Wir simulieren (ebenfalls mit dem universellen Programm) hintereinander jeweils den ersten Schritt der Funktionen $\varphi_x(1), \varphi_x(2), \ldots, \varphi_x(y-1)$, dann den zweiten Schritt, usw. Falls eine dieser Funktionen hält, beenden wir die Simulation und geben 1 aus. Sollte keine der Funktionen je terminieren, terminiert die Simulation nicht.

(iii) Wir simulieren eine variable Zahl von Programmen φ_x schrittweise in mehreren Iterationen. In der ersten Iteration simulieren wir den ersten Schritt von $\varphi_x(y+1)$, danach in der zweiten Iteration sowohl den zweiten Schritt von $\varphi_x(y+1)$ als auch den ersten Schritt von $\varphi_x(y+2)$. In der dritten Iteration simulieren wir den dritten Schritt von $\varphi_x(y+1)$, den zweiten von $\varphi_x(y+2)$ und den ersten von $\varphi_x(y+3)$, usw. Dadurch erhöht sich sowohl die Anzahl der Simulationen als auch die Zahl der Simulationsschritte in jeder Iteration. Insbesondere wird dadurch die Funktion φ_x mit jedem Wert $z > y$ und jeder Schrittzahl irgendwann ausgewertet. Falls während der Simulation eine der Funktionen hält, geben wir 1 aus. Sollte keine der Funktionen je terminieren, terminiert die Simulation nicht.