Technische Universität München
Institut für Informatik
PD Dr. Markus Holzer
Dipl.-Inf. Michael Tautschnig

WS 2007/2008
Übungsblatt 5
Mittwoch, 14. November 2007

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Aufgabe 1 *s-m-n Theorem*

Konstruieren Sie eine totale, berechenbare Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ so, dass $f(m,n)$ der Index jener Funktion ist, die die n-fache Komposition von φ_m realisiert. Mit anderen Worten:

$$\varphi_{f(m,n)} = \underbrace{\varphi_m \circ \ldots \circ \varphi_m}_{n\,\text{mal}}.$$

Beachten Sie, dass f eine zweistellige Funktion ist.

Hinweis: Verwenden Sie das s-m-n Theorem.

Aufgabe 2 *Halteproblem*

Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{(i,j) \,|\, \varphi_i(\varphi_j(i)) \text{ terminiert}\}$$

nicht entscheidbar ist (eine Menge ist genau dann entscheidbar, wenn ihre charakteristische Funktion eine totale und berechenbare Funktion ist). Reduzieren Sie dazu ein geeignetes Problem.

Aufgabe 3 *Programmtransformation*

Wir manipulieren das Programm P_n zu einem Programm $P_{n'}$ in der folgenden Art und Weise:

$$P_{n'} = \quad X_1 := \mathit{succ}(X_1); X_1 := \mathit{pred}(X_1); P_n.$$

Offensichtlich berechnen $P_{n'}$ und P_n die gleiche Funktion.
Geben Sie eine Programmtransformationsfunktion (total und berechenbar) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und einen Index n so an, dass n Fixpunkt bezüglich des Rekursionstheorems ist (d.h. $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$), jedoch n' *kein* solcher Fixpunkt ist (d.h. $\varphi_{n'} \neq \varphi_{f(n')}$).

Hinweis: Betrachten Sie jenes f, das im Programmcode jeweils *succ* durch *pred* und umgekehrt ersetzt.

Aufgabe 4 *Totalitätsproblem*

Verwenden Sie das Rekursionstheorem, um die Unentscheidbarkeit des Totalitätsproblems $T = \{n \,|\, \varphi_n \text{ total}\}$ nachzuweisen.

Hinweis: Betrachten Sie die Programmtransformationsfunktion f, die durch das folgende Programm induziert wird:

$$P_{f(n)} = \begin{cases} \perp & \text{falls } n \in T \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 5

Gibt es einen Index e mit

$$\varphi_e(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_e(k) \text{ für ein } k < x \text{ nicht hält} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Verlassen Sie sich nicht auf Ihre Intuition ...