Technische Universität München
Institut für Informatik
PD Dr. Markus Holzer
Dipl.-Inf. Michael Tautschnig

WS 2007/2008
Übungsblatt 2
Mittwoch, 31. Oktober 2007

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Lösungshinweise

Aufgabe 1 *Satz von Myhill-Nerode*

(i) Man betrachte die beiden Wörter a^i und a^j mit $i \neq j$. Dann gilt $a^i \not\sim_L a^j$ (da für $z = b^i$ gilt $a^i z \in L$ jedoch $a^j z \neq L$). Es existieren daher unendlich viele Äquivalenzklassen und die Sprache ist daher nicht regulär.

(ii) Die Sprache ist endlich; es existieren daher nur endlich viele Äquivalenzklassen und die Sprache ist damit regulär.

(iii) Man betrachte die beiden Wörter a^i und a^j mit $i < j$. Dann gilt $a^i \not\sim_L a^j$ (da für $z = b^{i+1}c$ gilt $a^i z \in L$ jedoch $a^j z \neq L$). Es existieren daher unendlich viele Äquivalenzklassen und die Sprache ist daher nicht regulär.

(iv) Es gilt $\{xyx \mid x, y \in \{a, b\}^*\} = \{a, b\}^*$; für alle Wörter $x, y \in \{a, b\}^*$ gilt daher $x \sim_L y$, die Zahl der Äquivalenzklassen ist gleich eins und die Sprache ist regulär.

(v) Man betrachte die beiden Wörter $a^i b$ und $a^j b$ mit $i < j$. Dann gilt: $a^i b \not\sim_L a^j b$ (da für $z = a^i b$ gilt: $a^i b a^i b \in L$, aber $a^j b a^i b \neq L$, da sich das letzte Wort nicht in der Form xyx schreiben lässt). Es existieren daher unendlich viele Äquivalenzklassen und die Sprache ist daher nicht regulär.

Aufgabe 2 *Reguläre Mengen*

Wir beweisen die Aussage mittels struktureller Induktion über den Aufbau regulärer Mengen. Per Definition sind die regulären Mengen $\emptyset$, λ und $\{x\}$ für alle $x \in \Sigma$ auch pseudo-regulär. Es bleibt daher nur zu zeigen, dass sich die regulären Operatoren $\cup$, $\cdot$ und * pseudo-regulär modellieren lassen.
Seien also nun U und V reguläre und pseudo-reguläre Mengen (Induktionsannahme); wir zeigen, dass auch $U \cup V$, UV und U^* pseudo-regulär ist. Dies ist offensichtlich per Definition für $U \cup V$ der Fall. Für die anderen beiden Fälle benötigen wir die folgende Beobachtung:
Ist $\lambda \notin V$, so ist die reguläre Operation xV für ein $x \in \Sigma$ darstellbar durch den pseudo-regulären Ausdruck $x\Sigma \circ V$; falls $\lambda \in V$ gilt $xV = (x\Sigma \circ V) \cup \{x\}$. Durch endliche Vereinigung sehen wir, dass sich auch ΣV pseudo-regulär darstellen lässt.
Mit Hilfe dieser Beobachtung lässt sich nun die reguläre Operation UV darstellen durch $UV = U \circ \Sigma V$ falls $\lambda \notin V$ und $UV = (U \circ \Sigma V) \cup U$, also jeweils durch pseudo-reguläre Ausdrücke. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass sich auch U^* pseudo-regulär darstellen lässt. Es gilt

$$\underbrace{\Sigma U \circ \Sigma U \circ \ldots \circ \Sigma U}_{n \text{ mal}} = \Sigma U^n,$$

wie man einfach durch Induktion zeigt. Somit ist

$$\begin{aligned}(\Sigma U)^\circ &= \{\lambda\} \cup \Sigma \cup (\Sigma U) \cup (\Sigma U \circ \Sigma U) \cup (\Sigma U \circ \Sigma U \circ \Sigma U) \cup \ldots \\ &= \Sigma U^* \cup \{\lambda\}\end{aligned}$$

Daraus leitet man die folgende Darstellung für U^* ab: $U^* = \{\lambda\} \cup (U \circ (\Sigma U)^\circ)$; zum Beweis setzt man den obigen Ausdruck für $(\Sigma U)^\circ$ ein und verifiziert, dass sich die rechte Seite der Gleichung zu U^* vereinfachen lässt.

Aufgabe 3 *Bestimmung der Sprachklasse*

(a) Wäre L regulär, dann müsste R_L endlichen Index haben. Man betrachte die beiden Wörter b^i und b^j mit $i \neq j$. Dann gilt: $(b^i, b^j) \notin R_L$, da für $k \geq 0$, $w = aa^k$ und $w' = c^i$ gilt: $aa^k b^i c^i \in L$, aber $aa^k b^j c^i \notin L$. Es existieren daher unendlich viele Äquivalenzklassen und die Sprache ist nicht regulär.

(b) *Hinweis: Das uvw-Theorem besagt, dass falls L regulär ist eine Konstante n existiert, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ als $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ schreiben lässt und für alle $i \geq 0$ das Wort uv^iw ebenfalls in L liegt.*

Sei nun n eine solche Konstante und k und l weitere Konstanten mit $k > 0$ und $k+2l \geq n$. Für jedes Wort $z = a^k b^l c^l$ gilt dann $z \in L$ und mit $u = \lambda$ und $v = a$ auch $uv^iw \in L$ für alle $i \geq 0$. Andererseits gilt aber auch für $w = b^l c^m$ mit $l + m \geq n$ und $v = b$ oder $v = c$, dass $uv^iw \in L$ für alle $i \geq 0$.

Daher kann mit dem *uvw*-Theorem nicht gezeigt werden, dass die Sprache L nicht regulär ist.