Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Markus Holzer
Dipl.-Inf. Michael Tautschnig

WS 2006/2007
Übungsblatt 14
Sonntag, 4. Februar 2007

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Aufgabe 1 *Akzeptable Programmiersysteme (1)*

Seien $A_0, A_1, \ldots$ und $B_0, B_1, \ldots$ zwei akzeptable Programmiersysteme. Zeigen Sie, dass es eine unäre Funktion geben muss, die in beiden Aufzählungen den gleichen Index besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Aufzählung $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots$ und weisen Sie nach, dass diese selbst wieder ein akzeptables Programmiersystem ist. Wenden Sie dann das Rekursionstheorem an.

Aufgabe 2 *Akzeptable Programmiersysteme (2)*

Geben Sie Beispiele für akzeptable Programmiersysteme $A_0, A_1, \ldots$ mit folgenden Eigenschaften an:

(i) Es gibt *kein* $i \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_i = \alpha_{i+1} = \alpha_{i+2}$.

(ii) Für jede berechenbare Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_i = \alpha_{i+1} = \cdots = \alpha_{i+k} = \varphi$.

Aufgabe 3 *(Nicht) Rekursiv aufzählbar*

Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) Jede Teilmenge einer rekursiven Menge ist rekursiv.

(ii) Die Mengen A und B sind genau dann rekursiv aufzählbar, wenn $A \cup B$ rekursiv aufzählbar ist.

(iii) Jede Teilmenge einer rekursiv aufzählbaren Menge ist rekursiv aufzählbar.

(iv) Rekursiv aufzählbare Mengen sind unter Schnittbildung abgeschlossen.

Aufgabe 4 *Reduktionen*

Eine Menge A ist many-one reduzierbar auf eine Menge B (geschrieben $A \leq_m B$), falls es eine totale und berechenbare Funktion f gibt mit

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Zwei Mengen A und B sind many-one äquivalent, falls $A \leq_m B$ und $B \leq_m A$; in diesem Fall schreiben wir $A \equiv_m B$.

Zeigen Sie: $\{i \mid W_i \text{ unendlich}\} \equiv_m \{i \mid \varphi_i \text{ total}\}$

Hinweis: Konstruieren Sie f mittels Dovetailing.

Aufgabe 5 *(Nicht) Rekursiv aufzählbar (2)*

Geben Sie den Status der folgenden Mengen an (rekursiv, rekursiv aufzählbar, nicht rekursiv aufzählbar):

(i) $I_1 = \{i \mid \varphi_i \text{ ist nicht überall undefiniert}\}$

(ii) $I_2 = \{i \mid \varphi_i \text{ ist keine injektive Abbildung}\}$

(iii) $I_3 = \{i \mid \mathrm{dom}(\varphi_i) \text{ ist endlich}\}$

(iv) $I_4 = \{i \mid \mathrm{dom}(\varphi_i) \text{ ist unendlich}\}$

(v) $I_5 = \{i \mid \varphi_i \text{ wird von einem WHILE-Programm mit maximal } 10^{10^{100}} \text{ Variablen berechnet}\}$

(vi) $I_6 = \{i \mid \text{das WHILE-Programm } P_i \text{ enthält maximal 3 Variablen}\}$

Hinweis: Verwenden Sie Dovetailing und die Sätze von Rice.