Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Markus Holzer
Dipl.-Inf. Michael Tautschnig

WS 2006/2007
Übungsblatt 12
Samstag, 20. Januar 2007

Übung zur Vorlesung Automaten, Formale Sprachen und Berechenbarkeit

Aufgabe 1 *Universelle Funktionen (1)*

Sei $\mathcal{F}$ eine beliebige Familie von Funktionen $\mathbb{N}^j \to \mathbb{N}$ für ein fixes $j \geq 1$. Eine *universelle Funktion* für $\mathcal{F}$ ist eine Funktion $F : \mathbb{N}^{j+1} \to \mathbb{N}$ für die gilt:

- Für jede Zahl $e \geq 0$ gehört die Funktion $F(e, x_1, \ldots, x_j)$ zu $\mathcal{F}$.
- Für jede Funktion $f(x_1, \ldots, x_j) \in \mathcal{F}$ existiert eine Zahl $e \geq 0$ so, dass für alle $x_1, \ldots, x_j$ gilt: $F(e, x_1, \ldots, x_j) = f(x_1, \ldots, x_j)$.

In dieser Aufgabe nehmen wir zur Vereinfachung $j = 1$ an.

(i) Geben Sie eine universelle Funktion für die Funktionenklasse $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ an.

(ii) Geben Sie eine universelle Funktion für die Funktionenklasse $\{x, x^3, x^5, x^7, \ldots\}$ an.

(iii) Zeigen Sie, dass jede *endliche* Familie $\mathcal{F}$ eine universelle Funktion besitzt.

Aufgabe 2 *Universelle Funktionen (2)*

(i) Sei $\mathcal{F}$ eine Familie totaler, unärer Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die eine universelle Funktion $F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ besitzt. Zeigen Sie, dass eine totale, unäre Funktion existiert, die nicht in $\mathcal{F}$ liegt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Familie *aller* totalen und berechenbaren Funktionen keine universelle *berechenbare* Funktion besitzt.

(iii) Definieren Sie eine unendliche Familie totaler Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die eine berechenbare universelle Funktion besitzt.

Aufgabe 3 *Universelle Funktionen (3)*

Sei P_e ein Programm, das die universelle Funktion $\Phi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ berechnet. Zeigen Sie, dass P_e auf den Eingaben (e, a) und $(a, 0)$ für alle $a \in \mathbb{N}$ den gleichen Wert liefert.

Aufgabe 4 *Berechenbare Funktionen*

Geben Sie an, ob die folgenden Funktionen berechenbar sind oder nicht.

(a)

$$\psi_1(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_x(y) \text{ nach Ausführung von} \\ & z \text{ elementaren Instruktionen hält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b)

$$\psi_2(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_x(z) \text{ für ein } z < y \text{ hält} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

(c)

$$\psi_3(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_x(z) \text{ für ein } z > y \text{ hält} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$